ELEMENTA MATHEMATICA

IN QUATUOR TOMOS DIGESTA.

TOMUS QUARTUS

In quo sectionum conicarum, solidorum ex earum revolutione genitorum, ac figurarum isoperimetratum symptomata demonstrantur, præcipuaque elementaris Geometriæ Problemata resolvuntur.

INDEX
LIBRORUM
QUI IN HOC QUARTO TOMO EXHIBENTUR.

LIBER XV.

De ſectionibus conicis.

LIBER XVI.

De ſimilitudine, proportione, & dimenſione ſectionum conicarum, atque ſolidorum, quæ ex illarum circum axim revolutione generantur.

LIBER XVII.

De figuris iſoperimetris.

LIBER XVIII.

Præcipua elementaris Geometriæ problemata reſolvuntur, & demonſtrantur.

LECTORI BENEVOLO

TYPOGRAPHUS.

NOnnulla, imo vero etiam non pauca, in hoc quarto ſecundæ Mathematicorum Elementorum editionis Tomo, Lector Benevole, deſiderari animadvertes, quæ in prima occurrunt: Id autem non meo factum arbitrio putes; Auctor ipſe, cum inchoata jam ſecunda hac editione a Præpoſitis ſuis, ut Secretarii Generalis munus ſuſtineret, Romam evocaretur in Hiſpaniam mox tranſmiſſurus, neque adeo per tempus liceret emendare, ac reficere, quæ vitio aliquo laborare in hoc quarto Tomo deprehenderat, opus ſuum propria manu mutilavit, atque amico, cui curam commiſerat, ut ſecundæ huic editioni præeſſet, impoſuit, ut quale ab ipſo relinquebatur, prodiret. Integrum itaque Librum XVI. ſuſtulit, cujus hic erat titulus: *de ſimilitudine, proportione, & dimenſione ſectionum conicarum, atque ſolidorum, quæ ex illarum circum axim revolutione generantur*. Utebatur enim in eo principio quodam fallaci, ex quo pleraque pendebant; cumque ex eodem nonnulla in ſequentibus libris collegiſſet, ea etiam delevit, pauca quædam præterea reformavit. Hinc autem factum eſt, ut qui antea Liber XVII. & XVIII. numerabatur, nunc Liber XVI. & XVII. inſcribatur, totumque adeo Opus Libris antea duodeviginti complexum in nova hac editione Libris tantum ſeptemdecim abſolvatur. Ex his pronum eſt cuique intelligere neceſſarium etiam fuiſſe poſtremas Figurarum Tabulas mutare. Nolim autem, Lector Benevole, cogites novam hanc editionem mancam propterea, atque imperfectam evaſiſſe; namque ea dumtaxat ſublata ſunt, quæ in Mathematicis aliorum elementis plerumque deſunt, quæque Auctoris noſtri propria erant, atque etiam nova, ſed malo quodam fato inſtabili fundamento ſubnixa: quocirca hæc poſterior editio perfectior habenda potius eſt, quod ab ea abſint, quæ in priori cenſuram mereri potuiſſent. Hæc ſunt, de quibus auctore ipſo volente, ac jubente monere te, Lector Benevole, debui. Fruere igitur diligentia mea in hac ſecunda editione adornanda, & diu vale.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER XV.

De sectionibus conicis.

QUam difficilis sit *sectionum conicarum* doctrina, & quantum Tyronibus negotii facessat, id ex eo vel maxime patere puto, quod *Geometria sublimior* ipsa jam vulgo appellari soleat. Hanc propterea explanaturus, curavi, ut non solum brevius, verum etiam clarius, quo fieri a me poterat, id præstarem. Totum idcirco librum in quatuor capita partitus sum, in quorum primo nonnulla exhibeo, quæ sectiones ipsas *generatim* sumtas respiciunt; in secundo *ellipseos*, in tertio *parabolæ*, & in quarto *hyperbolæ* symptomata præcipua demonstro.

CAPUT PRIMUM.

Præmittuntur nonnulla spectantia ad sectiones conicas in genere.

DEFINITIO I.

1. *SEctiones conicæ sunt figuræ planæ, quæ in plano conum secante vel a curva tantum coni superficie, vel ab ipsa curva superficie, atque simul* Fig. 1. *a circulo baseos determinantur.* Ut si conus BAC secetur plano FG, figura T.XIII. *ab* conica sectio nuncupatur.

SCHOLION I.

2. Quinque modis conus secari potest. Conus namque BAC potest se-

Fig. 1. cari *primo* plano DE per verticem A ad basim BC traducto, atque hujusmodi sectio est triangulum planum rectilineum BAC (*L b. XI.* § 91.). *Secundo* plano FG circulo baseos BC parallelo, & sectio *ab*, quæ hinc emergit, est circulus (§. 98.). *Tertio* plano GH, quod neque parallelum sit
Fig. 2. circulo basis BC, neque ipsi basi occurrat, sitque sectio *ab*. *Quarto* plano GD, quod ita conum dipescit, ut uni laterum AC ipsius coni sit paralle-
Fig. 3. lum, & per circulum basis transeat, & hinc habetur sectio DEF. *Postremo* plano ED, quod transeat per coni basim BC, simulque occurrat cum
Fig. 4. uno ipsius coni latere CA directe apicem versus producto, sitque sectio *abc*.
T. XIII. Verum ex his quinque sectionibus tres dumtaxat postremæ considerantur, & sub nomine *sectionum conicarum* ipsæ tantummodo veniunt. Prima namque, & secunda, *triangulum* scilicet *planum rectilineum*, atque *circulus*, independenter omnino a cono spectari possunt, & debent, optimoque jure ab omnibus, nulla habita ratione ad conum, spectantur. Quippe si secus, cum, ut ex alibi traditis aperte constat, notio trianguli, & circuli ad coni notionem necessario prærequiratur, in eam profecto labem impingeremus, quæ *vitiosus circulus* vulgo dicitur.

SCHOLION II.

3. Sectiones in cono *recto* spectavimus, easque deinceps quoque in eodem dumtaxat cono expendemus. Si autem in cono *scaleno* eas considerare quis velit, animadvertat necesse est, non eam tantum hujus coni sectionem esse circulum, quæ fit plano basi parallelo, verum etiam illam, quæ plano subcontrarie posito perficitur. Illa porro sectio coni scaleni BAC di-
Fig. 5. citur *subcontraria*, quæ fit tali lege, ut in triangulo BAC per coni axim
T. XIII. trajecto recta DE, communis nimirum sectio trianguli BAC, & plani conum secantis, constituat triangulum DAE simile quidem triangulo BAC, sed subcontrarie positum, videlicet habens angulum AED æqualem angulo ABC, & angulum ADE angulo ACB. Hanc autem coni sectionem DE esse circulum, ex eo ostenditur, quod sectio DE non sit diversa a sectione FG basi BC parallela, sed illi congruat, si invertatur, nimirum si ponatur latus AE trianguli ADE super latus AF trianguli AFG, & latus AD super latus AG.

DEFINITIO II.

4. *Curvæ conicæ dicuntur illæ lineæ curvæ, quibus conicæ sectiones terminantur*. Tres idcirco sunt curvæ conicæ, quemadmodum tres sunt coni sectiones.

LEMMA I.

Recta linea uni duarum rectarum parallelarum non in eodem plano cum illa existentium parallela, alteri quoque earundem est parallela.

5. Sint duæ rectæ parallelæ AB, CD, quarum uni CD parallela sit recta EF in diverso plano existens. Dico, rectam EF alteri quoque AB esse parallelam.

Demonstratio.

Quoniam duæ AB, CD sunt parallelæ, si in illas incidat recta *ab*, quæ sit uni AB perpendicularis, alteri quoque CD erit perpendicularis (*Lib. IV.* §. 16.). Eadem ratione, si per punctum *b* ducatur recta *bc* ad perpendiculum incumbens rectæ CD, ipsa *bc* rectæ quoque EF ad perpendiculum insistet. Duæ autem *ab*, *cb* sunt in eodem plano (*Lib. VIII.* §. 18.). Ergo eidem plano perpendiculares erunt rectæ AB, EF; atque propterea duæ AB, EF erunt inter se parallelæ (§. 20.). Itaque recta &c. quod erat ostendendum. Fig. 6. T. XIII.

LEMMA II.

Recta linea ducta a vertice coni per punctum sumtum in illius superficie ad peripheriam circuli baseos, tota in ipsa jacet superficie.

6. A vertice A coni BAC per punctum *a* sumtum in illius superficie ducatur ad peripheriam circuli baseos BHC recta A*c*. Dico, rectam A*c* jacere totam in ipsa coni superficie. Fig. 7. T. XIII.

Demonstratio.

Etenim rectæ A*c* congruit illa recta linea, ex qua, dum circa peripheriam BHC revolvitur, immoto existente altero illius extremo in vertice A, curva coni superficies producitur. Quippe, si secus, duæ rectæ lineæ spatium clauderent, quod repugnat (*Lib. IV.* §. 7.). Ergo recta A*c* jacet tota in curva coni BAC superficie; adeoque recta &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA I.

In omni conica sectione potest duci recta linea, quæ omnes rectas eidem rectæ in ipso sectionis plano parallelas bifariam dividat.

7. Spectetur conica sectio *aEbM*, in cujus plano recta EM sit communis sectio trianguli BAC per coni axim transeuntis, & ipsius plani *aEbM*. Recta autem BC sit diameter circuli baseos, adeoque basis trianguli BAC, atque ad rectos angulos recta BC dividat chordam HF in G. Planum vero sectionis *aEbM* ita se habeat in cono, ut recta *ab* ducta in ipso plano sit rectæ HF parallela. Dico, rectam *ab* dividi bifariam in puncto *e* a recta EM.

Fig. 7. Fig. 8. T.XIII.

Demonstratio.

A vertice A coni per extrema puncta *a*, *b* rectæ *ab* ducantur ad peripheriam circuli baseos BHC rectæ *Ac*, *Ad*, quæ totæ erunt in curva ipsius coni superficie (§. 6.), & jungantur puncta *c*, *d* recta *cd* constituaturque propterea triangulum planum rectilineum *cAd*, cujus sectio facta a plano trianguli BAC sit recta *Am*. Quoniam igitur recta *ab* posita est parallela rectæ HF in plano circuli baseos existenti, spectari potest veluti sectio plani *xy* (exprimitur recta linea, vitandæ confusionis gratia) paralleli circulo basis BHC determinata a plano *cAd*. Ab hoc eodem autem plano secatur etiam planum BHC, ejusque sectio est recta *cd*. Ergo rectæ *ab*, *cd*, utpote sectiones planorum parallelorum, erunt parallelæ (*Lib. VIII.* §. 26.). Recta autem *ab* posita est parallela rectæ HF. Ergo eidem rectæ HF parallela erit etiam recta *cd* (§. 5.); ac proinde angulus B*me* erit rectus, utpote recto BGH æqualis (*Lib. IV.* §. 14.), ipsaque recta *cd* bifariam divisa erit a diametro BC (*Lib. VII.* §. 39), erit nempe $cm = md$. Manifestum porro est, esse $em \cdot ae = md \cdot eb$; cum sit $em \cdot ae = Am \cdot Ae$, sicuti etiam $mb \cdot eb = Am \cdot Ae$ (*Lib. IX* §. 59.). Ergo erit quoque $ae = eb$ (*Lib. I.* §. 127.). Eodem modo ostendam, omnes rectas in plano conicæ sectionis *aEbM* parallelas eidem rectæ *ab* bifariam dividi a recta EM; cum omnes hujusmodi rectæ sint eidem HF parallelæ. Itaque in omni &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

In omni sectione conica potest duci recta linea, quæ omnes rectas eidem rectæ parallelas non solum bifariam, verum etiam ad angulos rectos dividat.

8. Quandoquidem, iisdem positis, sit recta *ae* fuerit perpendicularis plano trianguli BAC, recta *ab* non tantum bifariam, sed etiam ad angulos rectos

ctos secabitur a recta EM, & eadem ratione omnes aliæ in eodem plano *a*E*b*M eidem rectæ *ab* parallelæ bifariam ab ipsa EM dividentur. Cum enim recta EM sit in plano trianguli BAC, angulus *ae*E erit rectus (*Lib.* VIII. §. 2.); & ideò recti erunt etiam anguli *ae*M, M*eb*, *be*E (*Lib.* III. §. 52.); adeoque &c. Fig. 7. Fig. 8. T.XIII.

S C H O L I O N.

9. Recta *ae* perpendicularis erit plano trianguli BAC, quotiescunque planum ipsius trianguli circulo baseos BHC ad perpendiculum institerit.

C O R O L L A R I U M II.

In omni sectione conica, si conus fuerit rectus, communis sectio plani secantis, & trianguli per axim dividit bifariam, atque ad rectos angulos omnes rectas eidem rectæ parallelas.

10. Id enim ostensum est de recta EM, quæ in cono recto BAC est communis sectio plani secantis *a*E*b*M, & trianguli BAC per axim.

D E F I N I T I O III.

11. *Diameter conicæ sectionis est recta linea omnes rectas eidem rectæ, quam bifariam secat, in ipso plano parallelas bifariam dividens.* Ut si recta AB in conica sectione ABD bifariam diviserit rectas *ab*, *ed*, omnesque alias eidem rectæ *xy*, quam dividit bifariam, parallelas, erit diameter conicæ sectionis ABD. Fig. 9. Tab. III.

D E F I N I T I O IV.

12. *Axis conicæ sectionis est illa recta linea, quæ non bifariam tantum verum etiam ad angulos rectos dividit omnes rectas eidem rectæ ab ipsa bifariam sectæ in eodem plano parallelas.* Sic recta AB erit axis conicæ sectionis ACBD, si non solum bifariam, sed etiam ad rectos angulos diviserit rectas *ed*, CD, *ab*, omnesque alias eidem rectæ *px*, bifariam, atque ad angulos rectos ab ipsa AB divisæ, parallelas. Fig. 10. T.XIII.

C O R O L L A R I U M I.

13. *Axis conicæ sectionis desumtæ ex cono recto est illa recta linea, quæ est communis sectio plani sectionis, & trianguli per axim.* Hæc enim dividit bifariam, atque ad rectos angulos omnes rectas eidem rectæ parallelas (§. 10.).

Co

COROLLARIUM II.

14. *Axis sectionis conicæ est etiam illius diameter, sed non omnis diameter est axis*. Quandoquidem axis bifariam dividit omnes rectas eidem rectæ parallelas, prout exigit diameter. At vero non quævis diameter dividit easdem rectas ad angulos rectos, prout postulat axis.

SCHOLION.

15. Axis sectionis conicæ dicitur absolute illius *diameter*, vel *diameter primaria*. Illæ vero diametri, quarum nulla est axis, *diametri secundariæ* nuncupantur.

DEFINITIO V.

Fig. 12. T.XIII. 16. *Vertex conicæ sectionis est punctum extremum axis*. Ut si recta AB fuerit axis conicæ sectionis ACBD, punctum illius extremum A erit vertex ipsius sectionis. Punctum vero extremum diametri *vertex diametri* vocatur.

DEFINITIO VI.

17. *Ordinatim diametro applicata dicitur qualibet illarum rectarum parallelarum, quæ ab ipsa diametro bifariam dividuntur*. Sic qualibet rectarum parallelarum *ab*, *cd*, *xy*, quæ bifariam secantur a diametro AB, dicitur *ordinatim* ipsi diametro *applicata*. Earum vero pars dimidia, ut *mb*, *nd*, *zy*, *semiordinata* ad ipsam diametrum vocari solet. Plerique tamen nomine *ordinatim* diametro *applicatæ* partem ipsam dimidiam intelligunt. (Fig. 9. T.XIII.)

DEFINITIO VII.

18. *Abscissæ*, quæ etiam *sagittæ* appellari solent, *dicuntur illæ diametri portiones, quæ inter diametri verticem, & rectas ordinatim ipsi diametro applicatas continentur*. Hujusmodi sunt portiones Am, Ax, An diametri AB, videlicet portio Am dicitur *abscissa* correspondens ordinatæ *ab*; portio Ax *abscissa* correspondens ordinatæ CD, & sic deinceps. (Fig. 10. T.XIII.)

DEFINITIO VIII.

19. *Recta conicam sectionem tangens vocatur illa, quæ habet commune punctum cum ea curva, qua sectio ipsa continetur, sed reliqua omnia illius puncta extra ipsam curvam reperiuntur; ac proinde tota extra conicam sectionem cadit*. Sic recta AE dicitur tangere conicam sectionem ABD in puncto A; quia punctum A dumtaxat est commune rectæ AE, & curvæ ABD, qua (Fig. 9. T.XIII.)

ipsa

ipsa sectio terminatur; adeo nimirum ut reliqua omnia puncta ipsius rectæ AE extra illam curvam reperiantur.

DEFINITIO IX.

20. *Focus, sive umbilicus sectionis conicæ dicitur illud axis punctum, in quo omnes luminis radii, qui in curvam, qua sectio terminatur, ex data parte incidunt, post reflexionem simul uniuntur.*

THEOREMA II.

Recta linea ducta per extremum diametri conicæ sectionis parallela ordinatim applicatis ad ipsam diametrum, conicam ipsam sectionem tangit. Et vicissim recta tangens sectionem conicam ducta per punctum extremum diametri est parallela ordinatim ad ipsam diametrum applicatis.

I.

21. Per extremum punctum A diametri AB conicæ sectionis ABD ducatur recta AE parallela ordinatis *ab*, *ed* ad ipsam diametrum. Dico, rectam AE tangere conicam sectionem in puncto A.

Demonstratio.

Si namque fieri potest, recta AE secet conicam ipsam sectionem, quemadmodum recta AF. Cum igitur recta AE, sive AF sit parallela ordinatis *ab*, *ed* ad diametrum AB, atque intra conicam sectionem cadat, ipsa quoque erit una ex ordinatis ad diametrum AB; ac proinde ab ipsa diametro AB bifariam dividetur (§. 17.). Ergo recta AE non attingit diametrum AB in puncto illius extremo A contra hypothesim. Itaque recta AE non secat, sed tangit conicam sectionem in puncto A. Fig. 9. T.XIII.

I I.

22. Vicissim recta AE ducta per extremum diametri AB tangat conicam sectionem in puncto A. Dico, rectam AE esse parallelam ordinatis *ab*, *ed* ad ipsam diametrum AB.

Demonstratio.

Quandoquidem, si recta AE non est parallela ordinatis *ab*, *ed* educatur ex puncto contactus A recta AG ipsis ordinatis parallela. Igitur recta AG erit simul tangens, & non tangens conicam sectionem ABD. Erit namque tangens ex eo, quod sit ordinatis *ab*, *ed* parallela (§. 21.). Non erit vero tan-

tangens; cum ex hypothesi tangens sit recta AE. Cum igitur fieri nequeat, ut recta AG simul tangat, & non tangat conicam sectionem ABD, remanet, rectam AE, quæ tangit conicam sectionem ABD in vertice diametri AB, esse parallelam ordinatis *ab*, *ed* ad ipsam diametrum. Itaque recta &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Quævis diameter conicæ sectionis bifariam dividit omnes rectas parallelas rectæ tangenti ductæ per extremum punctum ipsius diametri.

23. Ut si recta AB fuerit diameter conicæ sectionis ABD, per cujus diametri extremum punctum A ducatur tangens AE, cui parallelæ sint rectæ *ab*, *ed*, *xy*, diameter AB bifariam dividet ipsas rectas *ab*, *ed*, *xy*. Cum enim recta AE sit parallela ordinatim applicatis ad diametrum AB (§. 22.), rectæ *ab*, *ed*, *xy*, quibus ipsa AE est parallela, erunt diametro AB ordinatim applicatæ. Igitur diameter AB bifariam ipsas dividet (§. 17).

Corollarium II.

Recta tangens conicam sectionem, si ex vertice axis ducta fuerit, erit ipsi axi perpendicularis.

24. Videlicet recta AE ducta ex vertice A axis AB conicæ sectionis Fig. 10. T. XIII. ACBD, ipsamque sectionem tangens, erit ipsi axi AB perpendicularis. Quippe cum sit parallela ordinatæ *ab* (§. 22.), & angulus A*mb* sit rectus (§. 12.), rectus quoque erit angulus EA*m* (*Lib. IV.* §. 13.); ac proinde recta AE rectæ AB ad perpendiculum incumbit (*Lib. III.* §. 24.).

CAPUT SECUNDUM.

De Ellipsi.

Definitio I.

25. Ellipsis *dicitur illa sectio coni, quæ fit plano basi minime parallelo neque subcontrarie posito, neque illi occurrente*; ac proinde *cujus axis dividit duo latera trianguli per coni axim transeuntis, & si extra conum axis ipse producatur, concurrit cum basi ipsius trianguli extra conum itidem producta, quin auferat triangulum simile triangulo per axim, quomodocunque sumatur*. Talis itaque est sectio E*a*M*b* coni BAC. Ejus quippe axis EM Fig. 8. T. XII. secat duo latera AB, AC trianguli BAC per axim, & cum altero latere BC, si utrumque extra conum producatur, concurrit in puncto N, quin triangulum EMA sit simile triangulo BAC, propterea quod planum, quo sectio

sectio ipsa perficitur, parallelum non sit basi, neque subcontrarie positum, neque illi occurrens. Hæc porro ellipseos definitio mere nominalis est, atque nullam plane ellipsis proprietatem designans.

COROLLARIUM I.

26. *Curva elliptica in orbem redit, seu ellipsis una tantum curva linea in se rediunte, quemadmodum circulus, cui affinis est, undique terminatur.*

COROLLARIUM II.

27. *Hinc duo sunt vertices ellipsis*. Illius quippe axis in duobus punctis occurrit curvæ, qua ellipsis comprehenditur.

DEFINITIO II.

28. *Centrum ellipsis est punctum, in quo axis bifariam dividitur*. Ut si axis AB ellipsis ACBD dividatur bifariam in puncto *x*, punctum *x* erit centrum ipsius ellipsis. Dicitur autem *centrum*; quia omnes rectæ per illud transeuntes, & utrinque ad curvam ellipticam terminatæ, bifariam in illo, ut patebit, dividuntur. Fig. 8. T. XIII.

DEFINITIO III.

29. *Conjugatæ diametri ellipseos dicuntur duæ quælibet diametri ita se habentes, ut utraque bifariam dividat omnes rectas earum alteri parallelas*. Ut si diameter AB ellipsis ABD bifariam diviserit omnes rectas *ab*, *xy* &c. parallelas diametro *ed* & diameter *ed* secuerit itidem bifariam rectas *rn*, *fg*, omnesque alias parallelas diametro AB, duæ hujusmodi diametri AB, *ed* erunt *diametri conjugatæ* ellipsis ABD. Fig. 9. T. XIII.

COROLLARIUM.

30. *Rectæ parallelæ uni diametro ellipseos sunt ordinatæ ad diametrum illi conjugatam*. Videlicet rectæ *rn*, *fg* parallelæ diametro AB ellipsis AeD sunt *ordinatim applicatæ* diametro *de* priori AB conjugatæ. Cum enim diametri AB, *de* sint *conjugatæ* per hypothesim, diameter *de* bifariam dividet rectas *rn*, *fg*. Ergo rectæ *rn*, *fg* erunt *ordinatim* diametro *de applicatæ* (§. 17.).

DEFINITIO XIV.

31. *Axes conjugati ellipseos sunt diametri conjugatæ se invicem secantes ad angulos rectos*. Ut si diametri conjugatæ AB, CD in ellipsi ACBD sese mutuo ad angulos rectos secuerint, erunt *axes conjugati* ipsius ellipsis.

Co-

COROLLARIUM I.

32. *Axis ellipseos dividit bifariam, atque ad angulos rectos omnes rectas parallelas axi sibi conjugato.* Si nimirum rectæ AB, CD fuerint *axes conjugati* ellipseos ACBD, axis AB bifariam, & ad rectos angulos divider rectas *ed*, *pz* parallelas axi CD. Eas namque dividit bifariam; quia rectæ AB, CD sunt *diametri conjugatæ*. Dividit autem ad angulos rectos; quia, stante parallelismo rectarum *ed*, *pz* cum axe CD, angulus D*xn* non potest esse rectus, quin rectus itidem sit tum angulus *xnd*, tum angulus *xyz* (*Lib. IV. §.* 13.); ac proinde quin ipsæ rectæ *ed*, *pz* ab axe AB ad rectos angulos dividantur (*Lib. III. §.* 52.)

COROLLARIUM II.

33. *Rectæ parallelæ axi ellipseos sunt ordinatim applicatæ axi, qui est illi conjugatus.* Axes siquidem conjugati a conjugatis diametris sese mutuo ad rectos angulos secantibus non differunt; propterea sicuti rectæ parallelæ uni diametro ellipsis sunt *ordinatæ* ad diametrum conjugatam (§. 30.), idipsum de parallelis uni axi dicendum est, si ad conjugatum axem referantur.

LEMMA I.

In circulo quadrata semiordinatarum ad diametrum sunt æqualia rectangulis sub correspondentibus portionibus ipsius diametri comprehensis.

Fig. 11. T. XIII. 34. In circulo A*m*B*n* rectæ *bd*, *mn* sint ordinatæ ad diametrum AB, videlicet bifariam ab ipsa diametro divisæ. Dico, quadratum semiordinatæ *ad* æquare rectangulum ex A*a* in *a*B, sicuti etiam quadratum semiordinatæ *en* æquare rectangulum ex A*e* in *e*B.

Demonstratio.

Quoniam rectæ *bd*, *mn* bifariam dividuntur a diametro AB, divisæ erunt ad angulos rectos (*Lib. VII. §* 41.); ac proinde tam semiordinata *ad*, quam semiordinata *en* erit diametro AB perpendicularis (*Lib. III. §.* 24.). Igitur quadratum rectæ *ad* æquabit rectangulum ex A*a* in *a*B, & quadratum rectæ *en* æquabit rectangulum ex A*e* in *e*B (*Lib. IX §.* 113.). Itaque in circulo &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

35. Quoniam in circulo non potest diameter bifariam dividere rectam, nisi eam dividat ad angulos rectos (*Lib.* VII. §. 41.), diameter circuli spectari potest, veluti ipsius axis.

Co-

Corollarium I.

36. *In circulo quadrata semiordinatarum ad diametrum, sive ad axim, sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus ipsius axis.* Nimirum quadratum semiordinatæ *ad* in circulo A*m*B*n* est ad quadratum semiordinatæ *en*, ut rectangulum ex A*a* in *a*B ad rectangulum ex A*e* in *e*B. Quippe, cum quadratum rectæ *ad* adæquet rectangulum ex A*a* in *a*B, & quadratum semiordinatæ *en* sit æquale rectangulo ex A*e* in *e*B, quadratum rectæ *ad* erit ad rectangulum ex A*a* in *a*B, ut quadratum rectæ *en* ad rectangulum ex A*e* in *e*B. Ergo, *alternando*, quadratum rectæ *ad* erit ad quadratum rectæ *en*, ut rectangulum ex A*a* in *a*B ad rectangulum ex A*e* in *e*B (*Lib.* I. §. 125.).

Corollarium II.

37. Hinc circulus definiri potest: *Figura plana unica curva linea undique terminata, in qua rectarum semiordinatarum ad axim quadrata sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus ipsius axis, atque illis insuper sunt æqualia.*

Theorema I.

In ellipsi quadrata semiordinatarum ad axim sunt directe inter se, ut rectangula sub correspondentibus portionibus ipsius axis, sumtis ab utroque vertice, comprehensa; illis tamen non sunt æqualia.

In cono recto BAC, qui sectus sit triangulo BAC per axim, spectetur sectio elliptica D*d*E, cujus axis sit recta DE, communis nimirum sectio Fig. 12.
plani elliptici, & trianguli per axim. Rectæ autem *ac*, *bd* parallelæ uni T. XIII.
rectæ GF ductæ in circulo baseos BGC, ejusque diametro BC ad perpendiculum insistenti, sint semiordinatæ ad ipsum axim DE.

I.

38. Dico primo, quadratum semiordinatæ *ac* esse ad quadratum semiordinatæ *bd*, ut est rectangulum ex D*a* in *a*E ad rectangulum ex D*b* in *b*E.

Demonstratio.

Per puncta *a*, *b* in eodem plano trianguli BAC per axim ducantur rectæ *ef*, *mn* parallelæ diametro BC baseos coni. Et quoniam rectæ *ac*, *bd* positæ sunt parallelæ eidem rectæ FG in plano circuli baseos existenti, planum *ecf*, in quo sint duæ *ef*, *ac*, sicuti etiam planum *mdn*, in quo sint

sint duæ *mn*, *bd* erunt circulo baseos BGC parallelæ; ac proinde sectiones *ecf*, *mdn* erunt circuli (*Lib. XI.* §. 91.), quorum diametri erunt rectæ *ef*, *mn*, ipsisque ad perpendiculum insistens rectæ *ca*, *db*, quemadmodum recta FG illis parallela perpendiculariter incumbit diametro BC positæ in eodem cum illis plano BAC: constat enim, eandem esse inclinationem tum plani transeuntis per rectas *ca*, GF, tum plani trajecti per rectas *db*, GF, ad planum BAC (*Lib. VIII.* §. 29.). Cum igitur quadratum rectæ *ac* sit æquale rectangulo ex portionibus *ea*, *af* diametri *ef* circuli *ecf*, & quadratum rectæ *bd* adæquet rectangulum, quod sub segmentis *mb*, *bn* diametri *mn* circuli *mdn* comprehenditur (*Lib.* IX §. 113.), quadratum rectæ *ac* erit ad quadratum rectæ *bd*, ut est rectangulum ex *ea* in *af* ad rectangulum ex *mb* in *bn*. Rectangulum autem ex *ea* in *af* est ad rectangulum ex *mb* in *bn* in ratione composita ex ratione rectæ *ea* ad rectam *mb*, & ex ratione rectæ *af* ad rectam *bn*, videlicet basium, & altitudinum (§. 105.). Ergo etiam quadratum rectæ *ac* erit ad quadratum rectæ *bd* in ratione composita ex ratione rectæ *ea* ad rectam *mb*, & ex ratione rectæ *af* ad rectam *bn*. Constat porro, esse D*a*. D*b* $=$ *ea*. *mb*, sicuti etiam E*a*. E*b* $=$ *af*. *bn* (§. 59.); cum in triangulo *m*D*b* recta *ea* sit parallela rectæ *mb*, & in triangulo *a*E*f* recta *bn* sit parallela rectæ *af* (*Lib.* VIII. §. 26.). Ergo quadratum rectæ *ac* erit quoque ad quadratum rectæ *bd* in ratione composita ex ratione rectæ D*a* ad rectam D*b*, & ex ratione rectæ E*a* ad rectam E*b*. Manifestum est autem, rectangulum ex D*a* in *a*E esse ad rectangulum ex D*b* in *b*E in ratione composita ex ratione rectæ D*a* ad rectam D*b*, & ex ratione rectæ *a*E ad rectam E*b* (*Lib.* IX. §. 105.): spectando nempe rectas D*a*, D*b*, veluti eorum bases, & rectas *a*E, E*b*, veluti eorum altitudines. Ergo quadratum rectæ *ac* erit ad quadratum rectæ *bd*, ut est rectangulum ex D*a* in *a*E ad rectangulum ex D*b* in *b*E.

II.

39. Dico 2. quadratum semiordinatæ *ca* non esse æquale rectangulo ex D*a*, in *a*E, sicuti nec quadratum semiordinatæ *db* rectangulo ex D*b* in *b*E.

Demonstratio.

Quandoquidem, si quadrata semiordinatarum ad axim in ellipsi essent non tantum, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus ipsius axis, verum etiam illis æqualia, ellipsis non distingueretur a circulo (§. 37.). Id autem aperte falsum est. Ergo in ellipsi quadrata semiordinatarum ad axim non adæquant rectangula, quæ sub correspondentibus ipsius axis portionibus continentur. Itaque in ellipsi &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

40. Definiri idcirco potest ellipsis, nulla plane habita ratione coni, ex quo illa educitur: *Figura plana unica curva linea undique terminata, in qua recta-*

rectarum ad axim semiordinatarum quadrata sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus axis, illis tamen non sunt aequalia. Hac enim ratione explicatur natura ellipseos; tum prout convenit cum circulo, cui quammaxime affinis est, tum prout a circulo distinguitur. Convenit quippe ellipsis cum circulo, quatenus in utraque figura quadrata semiordinatarum ad axim sunt, ut rectangula, quae sub correspondentibus portionibus axis continentur. Differt vero ellipsis a circulo, quatenus in ellipsi quadrata semiordinatarum ad axim, ut in circulo accidit, illis rectangulis non sunt aequalia.

Corollarium II.

In ellipsi recta transiens per centrum, ejusque axim ad angulos rectos dividens, est ipsi axi inaequalis.

41. Recta nimirum CD transiens per centrum x ellipseos ACBD, ejusque axim AB ad angulos rectos dividens, non est aequalis ipsi axi AB. Fig. 10. T. XIII.
Cum enim recta CD, utpote ad axim AB ordinata (§. 17.), bifariam ab illo dividatur, esset $xD = xA$; cumque sit etiam $xA = xB$ (§. 28), quadratum semiordinatae xD aequaret quadratum rectae xA, sive rectangulum ex Ax in xB (*Lib. I.* §. 187.). Id autem repugnat ellipsi (§. 40.). Ergo &c.

Corollarium III.

Etiam quadrata ordinatarum ad axim in ellipsi sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus axis.

42. Ut si rectae ab, CD sint ordinatae ad axim AB ellipsis ACBD, quadratum ordinatae ab erit ad quadratum ordinatae CD, ut est rectangulum ex Am in mB ad rectangulum ex Ax in xB. Etenim cum sit $ab = 2mb$, & $CD = 2xD$, erit $ab . CD = mb . xD$ (*Lib. I.* §. 127.); ac proinde quadrata rectarum ab, CD erunt inter se, ut quadrata rectarum mb, xD (*Ibid.* §. 188.). Quadrata autem rectarum mb, xD sunt inter se, ut rectangula $Am \times mB$, $Ax \times xB$ (§. 38.). Ergo, ut ipsa eadem rectangula, erunt quadrata rectarum ab, CD. Fig. 10. T. XIII.

Corollarium IV.

In ellipsi ordinatae ad axim aequaliter distantes a verticibus sunt aequales.

43. Ut si distantia Am ordinatae ab a vertice A in ellipsi ACBD fuerit aequalis distantiae By ordinatae pz a vertice B, duae ordinatae ab, pz ad axim AB erunt aequales. Posita siquidem aequalitate segmentorum Am, By, etiam Fig. 10. T. XIII.

 duo

duo segmenta *mB*, *Ay* erunt æqualia; atque adeo rectangulum ex *Am* in *mB* æquabit rectangulum ex *By* in *yA*. Quadratum autem ordinatæ *ab* est ad quadratum ordinatæ *pz*, ut rectangulum ex *Am* in *mB* ad rectangulum ex *By* in *yA* (§. 42.). Ergo etiam quadrata rectarum *ab*, *pz* erunt æqualia; & ideo ipsæ quoque *ab*, *pz* erunt æquales (*Lib. I. §.* 127.).

Corollarium V.

In ellipsi ordinatæ ad axim æqualiter distantes ab illius centro sunt æquales.

44. Cum enim centrum ellipseos sit punctum in medio axis (§. 28.), ordinatæ ad axim æqualiter distantes a centro, æqualiter quoque distant a verticibus; adeoque sunt æquales (§. 43.).

Corollarium VI.

In ellipsi semiordinatæ ad axim æqualiter distantes a verticibus, aut a centro sunt æquales.

45. Etenim semiordinatæ sunt directe inter se, ut ordinatæ (*Lib. I. §.* 126.).

Theorema II.

Recta in ellipsi transiens per illius centrum, atque ad angulos rectos dividens axim, dividit bifariam, & ad angulos rectos omnes rectas ipsi axi parallelas.

46. In ellipsi ACBD, cujus axis sit recta AB, & centrum *x*, ducatur per *x* recta CD, quæ ad rectos angulos ipsum axim dividat. Dico, rectam CD dividere bifariam, atque ad rectos angulos omnes rectas axi AB parallelas.

Demonstratio.

Fig. 10.
T. XIII.

In æquali distantia a centro *x* ducantur ad axim AB semiordinatæ *am*, *py*, quæ propter hypothesim parallelæ erunt tum inter se, tum semiordinatæ C*x* (§. 17.), & jungantur extrema *a*, *p* recta *ap*. Quoniam igitur rectæ *am*, *py* sunt æquales (§. 45.), & parallelæ, etiam duæ *ap*, *my* erunt parallelæ (*Lib. V. §.* 88.); ac proinde quadrilaterum *m a p y* erit parallelogrammum (*Lib. VI. §.* 8.), & quidem rectangulum (*Ibid. §.* 9.); cum anguli *amy*, *pym* sint recti (§. 12.). Parallelogramma itidem rectangula erunt duo quadrilatera *auxm*, *xupy* ob parallelismum rectæ *ux* cum utraque *am*, *py*, & ob rectitudinem angulorum *mxu*, *uxy*. Igitur duo latera *au*, *mx* æqualia erunt

autem latera mx, xy posita sunt æqualia, & anguli xma, xyp sunt recti: erunt inter se, sicuti etiam duo up, xy (*Ibid.* §. 20.). Anguli quoque xua, xue erunt æquales, quemadmodum etiam auguli xup, pyx (§. 19.). Duo Ergo æqualia itidem erunt latera au, up, & recti anguli aux, xup (*Syn Alg.* §. 259.). Itaque recta ap axi AB parallela dividitur bifariam, atque ad rectos angulos a recta CD. Idipsum de quavis alia recta axi AB parallela eodem modo demonstrabitur. Igitur recta &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Recta in ellipsi transiens per illius centrum, ejusque axim ad angulos rectos dividens, est alter axis ipsius ellipsis, & quidem priori conjugatus.

47. Recta nimirum CD est alter axis ellipseos ACBD, & quidem axi AB conjugatus. Dividit enim bifariam, atque ad angulos rectos omnes rectas axi AB parallelas, prout exigit axis (§. 12.) eumque vicissim axis AB dividat bifariam, & ad rectos angulos omnes rectas parallelas rectæ CD, erunt AB, CD axes ipsius ellipsis ACBD conjugati (§. 31.). Fig. 10. T. XIII.

SCHOLION.

48. Duo itaque sunt axes in ellipsi, & quoniam inæquales sunt inter se (§. 41.), alter *major*, *minor* alter vocari solet. In ellipsi desumta a cono recto, *major axis* determinatur a triangulo per axim trajecto, atque elliptricum planum secante. Hinc *axis major* dicitur etiam *axis* ellipseos *primarius*, & *primaria diameter*. At vero *minor axis* ellipseos *axis secundarius*: & *secundaria diameter* nuncupatur.

LEMMA II.

Si recta linea secetur æqualiter, & inæqualiter, rectangulum sub inæqualibus segmentis comprehensum una cum quadrato segmenti intermedii erit æquale quadrato partis dimidiæ.

49. Recta linea AB secta sit bifariam in C, & utcunque in D. Dico, rectangulum FD contentum sub segmentis inæqualibus AD, DB, una cum quadrato CG segmenti intermedii CD, æquare quadratum AE partis dimidiæ AC. Fig. 13. T. XIII.

Demonstratio I.

Ponatur AC$=$CB$=a$, CD$=b$, adeoque AD$=a+b$, & DB$=a-b$. Quadratum ergo AE partis dimidiæ AC erit $=aa$, rectangulum FD$=aa$

$+ab-ab-bb=aa-bb$, & quadratum CG $=bb$. Quamobrem rectangulum FD una cum quadrato CG erit $=aa-bb+bb$. Constat autem esse $aa-bb+bb=aa$. Ergo rectangulum FD una cum quadrato CG æquabit quadratum aa, sive AE partis dimidiæ AC.

Demonstratio II.

Descripto enim circa totam AB semicirculo AEB, erectaque ex puncto D recta perpendiculari DH, ducatur ex centro C ad punctum H recta CH. Quoniam igitur rectangulum ex AD in DB, scilicet FD, est æquale quadrato rectæ DH (*Lib. IX. §.* 113.), rectangulum FD una cum quadrato CG rectæ CD erit æquale quadratis rectarum DH, CD simul sumtis (*Syn. Alg.* §. 265.). Duo autem ista quadrata simul sumta sunt æqualia quadrato rectæ CH (*Lib. VI. §.* 37.), adeoque etiam quadrato AE rectæ AC (*Lib. I.* §. 187.). Ergo rectangulum quoque FD una cum quadrato CG rectæ CD erit æquale quadrato AE partis dimidiæ AC (*Syn. Alg.* §. 282.). Itaque si recta &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA III.

In ellipsi etiam quadrata semiordinatarum ad minorem axim sunt directe inter se, ut rectangula sub correspondentibus portionibus ipsius axis sumtis ab utroque vertice comprehensa. At vero illis non sunt æqualia.

Fig. 14. T. XIII. Recta AB sit axis major, & recta CD axis minor ellipseos ACBD sese mutuo bifariam dividentes in centro x. Ducatur autem ad axim minorem semiordinata br, & ex puncto b semiordinata bm ad axim majorem, quæ cum parallelogrammum $mxrb$ constituant, ob parallelismum scilicet rectarum mb, xD, necnon rectarum br, Ax, erit $bm=xr$, & $br=mx$ (*Lib. VI. §.* 20.).

I.

50. Dico primo, quadratum xG semiordinatæ Ax esse ad quadratum bF semiordinatæ br, ut est rectangulum xE contentum sub segmentis Cx, xD ipsius axis CD ad rectangulum Cy sub segmentis Cr, rD ejusdem axis comprehensum.

Demonstratio.

Esto bz quadratum semiordinatæ bm ad majorem axim, & mn sit rectangulum contentum sub correspondentibus portionibus ipsius axis; & quoniam habetur $Cx = xD$, & $Ax = xB$, quadratum xE semiordinatæ xD ad majorem axim non erit diversum a rectangulo contento sub portionibus Cx, xD, quæ correspondent semiordinatæ Ax ad axim minorem, & quadratum xG semiordinatæ Ax ad eundem axim non erit diversum a rectangulo, quod sub portionibus Ax, xB axis majoris correspondentibus semiordinatæ xD comprehenditur. Cum ergo sit $xE . bz = xG . mn$ (§. 38.), erit quoque $xE - bz . xE = xG - mn . xG$ (*Lib. I. §.* 141.), adeoque $xE, xE - bz = xG . xG - mn$ (§. 121.). Est autem $xE - bz = Cy$; cum rectangulum, seu quadratum xE sit æquale rectangulo Cy, una cum quadrato bz (§. 49.); atque eadem ratione sit $xG - mn = bF$, quod nempe quadratum xG adæquet rectangulum mn, una cum quadrato bF. Ergo erit $xE . Cy = xG . bF$, sive $xG . bF = xE . Cy$.

II.

51. Dico 2., quadratum xG semiordinatæ Ax non esse æquale rectangulo xE, nec quadratum bF semiordinatæ br æquare rectangulum Cy.

Demonstratio.

Eadem est cum demostratione tradita §. 39. Itaque in ellipsi &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Etiam quadrata ordinatarum ad minorem axim ellipseos sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus ipsius axis.

52. Demonstratur eodem modo, quo §. 42. idipsum ostensum est de quadratis ordinatarum ad majorem axim.

COROLLARIUM II.

Tam ordinatæ, quam semiordinatæ ad minorem axim ellipseos æqualiter distantes a suo vertice respective, aut a centro, sunt æquales.

53. Ostenditur eodem modo, quo §. 43, 44, 45., idipsum demonstravimus de ordinatis, & semiordinatis ad majorem axim.

Corollarium III.

Tota peripheria circuli descripti circa majorem axim ellipseos cadit extra curvam ellipticam; intra illam vero tota peripheria circuli descripti circa axim minorem.

54. Tota nimirum peripheria circuli AECF descripti circa majorem
Fig.16. axim AC ellipseos ABCD reperitur extra curvam ellipticam ABCD; intra
Fig.16. illam verò tota peripheria circuli AECF descripti circa axim minorem
T.XIII. AC, ita nimirum ut duo tantum extrema puncta axis sint illis curvis communia. Etenim, si punctum *b* esset commune utrique curvæ, ellipticæ scilicet ABCD, & circulari AECF, recta *ab* esset semiordinata ad axim tam circuli, quam ellipsis; cumque quadratum semiordinatæ *ab* in circulo adæquet rectangulum ex A*a* in *a*C (*Lib. IX. §.* 113.), idipsum verum esset in ellipsi, secus ad ipsa natura ellipseos postulet.

Corollarium IV.

In ellipsi quadrata semiordinatarum ad majorem axim sunt minora rectangulis contentis sub correspondentibus portionibus ipsius axis. Quadrata vero semiordinatarum ad axim minorem sunt majora correspondentibus rectangulis.

55. Etenim, descripto circa majorem axim AC ellipseos ABCD circulo AECF, ductisque semiordinatis *ae*, MD, iisque ad peripheriam usque circuli productis, cum semiordinata *ae* in ellipsi deficiat a semiordinata *ab* in circulo (§. 54.), quadratum semiordinatæ *ae* minus erit quadrato
Fig.15. semiordinatæ *ab*. Quadratum autem semiordinatæ *ab* adæquat rectangulum ex A*a* in *a*C (*Lib. IX §.* 113.). Ergo quadratum semiordinatæ *ae* ab eo-
Fig.16. dem rectangulo deficiet. Eodem modo ostendam, quadratum semiordinatæ
T.XIII. MD deficere a rectangulo ex AM in MC. Contra vero, descripto circulo AECF circa axim minorem AC ellipseos ABCD, eodem ratiocinio ostendetur, quadratum semiordinatæ *ab* in ellipsi excedere rectangulum ex A*a* in *a*C, quod nempe huic rectangulo sit æquale quadratum semiordinatæ *ae* in circulo, sitque semiordinatæ *ae* quadratum minus quadrato semiordinatæ *ab*, quemadmodum recta *ae* deficit *a* recta *ab*.

Co·

COROLLARIUM V.

Quadrata semiordinatarum ad axim ellipseos tam majorem, quam minorem habent omnia eandem rationem ad sua respective rectangula sub correspondentibus axis portionibus comprehensa.

56. Videlicet quadratum semiordinatæ *ae* ad axim AC ellipseos ABCD eam habet rationem ad rectangulum ex A*a* in *a*C, quam ad rectangulum ex AM in MC habet quadratum semiordinatæ MD. Cum enim quadratum semiordinatæ *ae* sit ad quadratum semiordinatæ MD, ut est rectangulum ex A*a* in *a*C ad rectangulum ex AM in MC (§. 38. 50.), *alternando* erit similiter quadratum semiordinatæ *ae* ad rectangulum ex A*a* in *a*C, ut est quadratum semiordinatæ MD ad rectangulum ex AM in MC (*Lib. I. §.* 125.). Fig. 15. T. XIII.

THEOREMA IV.

In ellipsi semiordinatæ ad utramque axim eandem omnes habent rationem ad sibi respondentes semiordinatas ad diametrum circuli circa ipsum axim descripti.

57. Circa majorem axim AC ellipsis ABCD describatur circulus AECF, sintque rectæ MD, *ae* semiordinatæ ad ipsum axim in ellipsi, & rectæ MF, *ab* semiordinatæ ad diametrum circuli illis correspondentes. Dico, esse MD. MF = *ae*. *ab*.

Demonstratio.

Quadratum semiordinatæ MD est ad quadratum semiordinatæ *ae*, ut rectangulum ex AM in MC ad rectangulum ex A*a* in *a*C (§. 38.). Est autem etiam quadratum semiordinatæ MF ad quadratum semiordinatæ *ab*, ut hæc ipsa rectangula (§. 36.). Ergo quadratum semiordinatæ MD erit ad quadratum semiordinatæ *ae*, ut quadratum semiordinatæ MF ad quadratum semiordinatæ *ab* (*Lib. I. §.* 76.); & *alternando*, quadratum semiordinatæ MD erit ad quadratum semiordinatæ MF, ut quadratum semiordinatæ *ae* ad quadratum semiordinatæ *ab* (§. 125.). Igitur erit quoque MD. MF = *ae*. *ab* (§. 188.). Descripto porro circa minorem axim AC ellipseos ABCD circulo AECF, demonstrabitur eodem modo, esse *m*D. *m*F = *ab*. *ae*. Itaque in ellipsi &c. quod erat ostendendum. Fig. 15. Fig. 16. T. XIII.

COROLLARIUM I.

58. Hinc sequitur, esse MD. DF = *ae*. *eb*. Cum enim sit MD. MF

= *ae. ab*, erit etiam MF. MD = *ab. ae* (*Lib. I.* §. 121.), & *dividendo*,
Fig.15. MF — MD. MD = *ab* — *ae. ae* (§. 135.), sive DF. MD = *eb. ae*, adeo-
Fig.16. que MD. DF = *ae. eb* (§. 121.). Similiter in ellipsi ABCD cum sit *m*D.
T.XIII. *m*F = *ab. ae* erit FD. *m*F = *eb. ae* (§. 135.); atque propterea *m*F. FD = *ae. eb* (§. 121.).

COROLLARIUM II.

Etiam ordinatae ad utrumque axim ellipseos habent omnes eandem rationem ad ordinatas sibi correspondentes in circulo circa axim descripto.

59. Erit nempe BD. EF = *ne. db*. Enimvero, cum sit BD = 2 MD,
Fig.15. & EF = 2 MF, erit BD. EF = MD. MF (§. 127.). Est autem eandem ob causam *ne. db* = *ae. ab*, jamque constat, esse MD. MF = *ae. ab* (§.
Fig.16. 57.). Ergo erit BD. EF = *ne. db* (§ 77.). Eodem ratiocinio palam fiet
T.XIII. in ellipsi ABCD, circa cujus minorem axim AC descriptus sit circulus AECF, esse BD. EF = *db. ne*.

COROLLARIUM III.

Ordinatae ad utrumque axim ellipseos sunt directe inter se, ut ordinatae sibi correspondentes in circulo circa axim descripto.

60. Videlicet iisdem positis, erit BD. *ne* = EF. *db*. Quippe, cum jam
Fig.15. ostensum fuerit, esse BD. EF = *ne. db*, manifeste sequitur, esse itidem
Fig.16. BD. *ne* = EF. *db* (§. 125.). Similiter cum sit BD. EF = *db. ne*, erit
T.XIII. quoque BD. *db* = EF. *ne*.

COROLLARIUM IV.

Axis ellipseos est maxima omnium ordinatarum ad alterum axim.

61. Sic in ellipsi ABCD axis minor BD est major, quam recta *ne* ordinata ad majorem axim AC, & in ellipsi itidem ABCD axis major BD est
Fig.15. major, quam ordinata *db* ad axim minorem AC. Quandoquidem, circulis
Fig.16. circa ipsos axes descriptis, cum sit BD. EF = *ne. db* (§. 59.), quemad-
T.XIII. modum recta EF est major recta *db* (*Lib. VII.* §. 64.), ita recta BD excedet rectam *ne* (*Lib. I.* §. 128.). Eandem ob causam BD erit major, quam *db*; cum nempe sit BD. EF = *db. ne*, & EF major, quam *ne*.

COROLLARIUM V.

Ordinatæ ad utrumque axim ellipseos eo minores sunt quo magis ab illius centro recedunt.

62. Nimirum in ellipsi ABCD ordinata *ne* ad axim AC magis remota a centro M, quam ordinata *xz*, minor erit, quam ipsa *xz*. Etenim, cum sit *xz*. GH = *ne*. *db* (§.59.), sicuti recta GH excedit rectam *db* (*Lib.*VII.§ 64.), ita ordinata *xz* ordinatam *ne* quantitate superabit (*Lib.*I.§.128.). Fig. 5. T. X II.

THEOREMA V.

Rectæ tangentes ellipsim ductæ per extrema puncta ejusdem diametri, sunt inter se parallelæ.

63. Per extrema puncta A, B diametri AB ducantur rectæ AE, BF, quarum utraque tangat ellipsim ACBD. Dico, rectas AE, BF esse inter se parallelas. Fig. 10. T. XIII.

Demonstratio.

Ducatur ordinata CD ad ipsam diametrum. Itaque recta AE, utpote tangens ellipsim, erit parallela ordinatæ CD (§. 22.). Eadem autem ratione etiam recta BF est eidem CD parallela. Ergo duæ AE, BF inter se quoque sunt parallelæ (*Lib.*IV.§. 17.). Igitur rectæ tangentes &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA VI.

Rectæ lineæ ductæ a centro ellipseos ad extrema duarum ordinatarum ad axim æqualiter a centro distantium, sunt omnes inter se æquales; atque binas rectas per centrum ellipsis transeuntes illæ constituunt.

In ellipsi ACBD sint duæ ordinatæ *ae*, *db* ad axim AB, æqualiter distantes a centro *n*, ad quarum extrema ducantur ex ipso centro rectæ *na*, *ne*, *nd*, *nb*. Fig. 17. T. XIII.

I.

64. Dico primo, rectas *na*, *ne*, *nd*, *nb* esse inter se æquales.

De;

Demonstratio.

Cum enim latera *az*, *ze* triangulorum *nza*, *nze* sint æqualia, latus *zn* sit utrique commune, & anguli *nza*, *nze*, qui æqualibus lateribus continentur, sint æquales, utpote recti (§. 12.), bases quoque *na*, *ne* inter se æquales erunt (*Lib. V. §. 73.*). Eadem ratione etiam duæ *nd*, *nb* erunt æquales. Rursus quoniam duæ ordinatæ *ae*, *db* sunt æquales (§. 44.), æqualia itidem erunt earum dimidia *ze*, *yb* (*Lib. I. §. 126.*); cumque per hypothesim etiam rectæ *zn*, *ny* sint æquales sicuti etiam anguli *nze*, *nyb*, utpote recti (§. 12.), bases similiter *zne*, *zyb* erunt æquales (*Lib. V. §. 73.*). Igitur æquales erunt etiam duæ *na*, *nd* (*Synop. Alg. 259.*); ac proinde quatuor rectæ *na*, *nd*, *ne*, *nb* sunt inter se æquales.

I I.

65. Dico 1. rectas *dn*, *ne*, sicuti etiam rectas *an*, *nb*, esse in directum positas, sive quatuor rectas *na*, *ne*, *nd*, *nb* constituere binas rectas per centrum *n* transeuntes.

Demonstratio.

Duo latera *nd*, *ne* triangulorum *nyd*, *nze* sunt æqualia (§. 64.), sicuti etiam *ny*, *nz* per hyopthesim, necnon duo *dy*, *ze*, utpote dimidia ordinatarum æqualium *db*, *ea*. Igitur anguli quoque *dny*, *zne* sunt æquales (*Lib. V. §. 82.*); ac propterea duæ rectæ *dn*, *ne* sunt in directum positæ (*Lib. III. §. 55.*). Eadem ratione in directum positæ sunt etiam duæ *an*, *nb* Itaque rectæ *na*, *ne*, *nd*, *nb* binas rectas constituunt; adeoque rectæ &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

66. Hinc *in ellipsi duci possunt ex illius centro ad curvam, qua terminatur, quatuor rectæ inter se æquales.*

COROLLARIUM II.

In ellipsi recta conjungens extrema sumta ex adverso duarum ordinatarum ad axim æqualiter a centro distantium, transit per centrum ipsius ellipsis.

67. Ostensum namque est, rectas *ne*, *nd*, quibus cum centro *n* junguntur extrema *e*, *d* ordinatarum *ae*, *db* æqualiter distantium ab ipso centro, unam rectam constituere. Ergo recta ducta ab extremo *d* per centrum *n* tran-

transsibit per extremum *e*. Quippe, si secus, duæ rectæ haberent segmentum commune, quod repugnat (*Lib.* III. §. 48.).

COROLLARIUM III.

In ellipsi omnes rectæ per centrum ductæ, & utrinque ad curvam ellipticam terminatæ, bifariam in ipso centro dividuntur.

68. Demonstravimus enim, rectas *nd*, *ne* esse æquales inter se, & unam rectam constituere, quæ per centrum transit, Hinc

COROLLARIUM IV.

Omnis diameter ellipsis transit per illius centrum.

69. Etenim, si secus, bifariam non divideret omnes rectas eidem rectæ parallelas, prout ad diametrum requiritur. Quippe illam rectam non secaret bifariam, quæ per centrum transit; cum hujusmodi recta nonnisi in ipso centro bifariam dividatur (§. 68.).

COROLLARIUM V.

In ellipsi rectæ lineæ ductæ a centro ad curvam ellipticam æqualiter hinc inde ab axe distantes, sunt inter se æquales.

70. Ostensum est enim, rectas *na*, *ne*, quæ ob æqualitatem rectarum *za*, *ze* æqualiter distant ab axe AB, esse inter se æquales.

COROLLARIUM VI.

Quævis diameter ellipseos est una ex ordinatis ad diametrum sibi conjugatam.

71. Sic diameter *ed* ellipseos *Ae* D est una ex ordinatis ad diametrum sibi conjugatam AB. Bifariam namque dividitur a diametro AB in centro *n* Fig. 17. T. XIII.
(§. 68.), estque iis omnibus parallela, quæ sunt ad ipsam diametrum AB ordinatim applicatæ (§. 30.).

COROLLARIUM VII.

Unus axis ellipseos est una ex ordinatis ad alterum axim.

72. Axes namque ellipseos sunt ejusdem diametri conjugatæ (§. 47.).

THEO-

THEOREMA VII.

Si ex punctis extremis unius diametri ellipseos ducantur rectæ ellipsim tangentes, quæ cum alia diametro in directum producta concurrant, illæ æquales erunt inter se, duoque æqualia triangula constituent.

Per extrema puncta A, B diametri AB ellipsis ACBD ducantur rectæ AE,
Fig.17. BF ellipsim tangentes, quæ concurrant in punctis E, F cum altera diame-
T.XIII. tro *cd* in directum utrinque producta.

I.

73. Dico primo, rectas AE, BF esse inter se æquales.

Demonstratio.

Quoniam rectæ AE, BF sunt parallelæ (§. 63.), alterni anguli EA*n*, FB*n* erunt inter se æquales (*Lib.*IV. §. 15.). Æquales sunt autem etiam anguli ad verticem oppositi A*n*E, B*n*F (*Lib.* III. §. 51.), nec non latera A*n*, *n*B (§.68.), quæ in triangulis A*n*E, B*n*F æqualibus angulis adjacent. Ergo latera quoque AE, BF erunt inter se æqualia (*Lib. V.* §. 93.).

II.

74. Dico 2. triangula A*n*E, B*n*F esse æqualia.

Demonstratio.

Duo namque triangula A*n*E, B*n*F sunt hujusmodi, ut duo latera A*n*, *n*B habeant æqualia, quæ æqualibus angulis adjacent, ut modo demonstravimus. Ergo sunt æqualia (§. 94.). Itaque si ex punctis &c. quod erat ostendendum.

DEFINITIO V.

75. *Parameter axis ellipseos dicitur recta linea ducta per extremum punctum ipsius axis, ejus ordinatis parallela, cujus ratio ad ipsum axim diversa ab ea non est, quam habet quadratum cujusvis semiordinatæ ad rectangulum sub cor-*
Fig.15. *respondentibus axis portionibus comprehensum.* Ut si per extremum punctum
T.XIII. A axis AC ellipseos ABCD ducatur recta AE parallela ordinatæ BD, sitque recta AE ad axim AC, ut quadratum cujusvis semiordinatæ *ba* ad rectangulum ex A*b* in *b*C, recta AE erit *parameter* axis AC. Hujusmodi autem rectæ nomen *parametri* inditum est, quia eo utimur, ut patebit, ad dimetienda quadrata semiordinatarum ad ipsum axim. Ceterum recta, quam nunc *parametrum* dicimus, *latus rectum* olim vocabatur, ad differentiam axis, ex

cujus vertice parameter educitur, qui *latus transversum* nunc etiam vocari solet.

COROLLARIUM I.

76. *Parameter axis ad perpendiculum axi incumbit.* Cum enim parameter AE axis AC sit recta parallela semiordinatæ *ba* ad ipsum axim, duo anguli Interni EA*b*, *Aba* æquales erunt duobus rectis (*Lib. IV. §.* 13.). Angulus autem *Aba* est rectus (§. 12.). Ergo rectus erit etiam angulus EA*b*; ac proinde recta EA rectæ AC ad perpendiculum insistet (*Lib. III. §.* 24.).

COROLLARIUM II.

77. *Parameter tangit ellipsim in vertice axis, ex quo educitur.* Sic parameter EA est recta tangens ellipsim in vertice A axis AC, ex quo educitur. Patet evidenter ex eo, quod parameter sit recta parallela ordinatim axi applicatis, ducta ex illius vertice (§. 75.).

DEFINITIO VI.

78. *Figura axis ellipseos est rectangulum contentum sub ipso axe, ejusque parametro.* Sic rectangulum ACKE, quod sub axe AC, & sub ejus parametro AE comprehenditur, est figura axis AC ellipseos ABCD. Fig. 18. T. XIII.

DEFINITIO VII.

79. *Regulatrix, sive directrix ellipseos dicitur recta linea ducta ab extremo parametri ad alterum extremum punctum axis ipsius ellipsis. Subregulatrix vero, seu subdirectrix vocatur illa recta linea, quæ ducta a centro ellipseos ad parametrum, ipsum parametrum bifariam dividit.* Sic recta EC ducta ex puncto extremo E parametri AE ad extremum punctum C axis AC, *regulatrix*, sive *directrix* ellipseos ABCD nuncupatur. Ejusdem vero *subregulatrix*, sive *subdirectrix* recta FN ducta a centro F ellipsis ad parametrum AE, ipsumque bifariam dividens in puncto N.

COROLLARIUM.

80. *Subdirectrix ellipseos est parallela rectæ directrici, ejusque pars dimidia.* Enimvero, cum sit AF = FC, & per hypotesim AN = NE, erit AF . FC = AN . NE. Ergo recta FN erit parallela rectæ CE (*Lib. IX. §.* 64.). Rursus, cum propter parallelismum ipsarum FN, CE, sit FN . CE = AF . AC (§. 59.), quemadmodum habetur AC = 2AF, ita erit CE = 2FN. Hinc recta FN *semidirectrix* etiam, vel *semiregulatrix* ellipseos vocari solet.

THEO-

THEOREMA VIII.

Unus axis ellipseos est media proportionalis inter alterum axim sibi conjugatum, ejusque parametrum.

81. Rectæ AC, BD sint axes ellipsis ABCD. Recta vero AE sit parame-
Fig. 18. ter unius ex illis AC. Dico, alterum axim BD esse mediam proportiona-
T. XIII. lem inter axim AC, ejusque parametrum AE.

Demonstratio.

Quoniam axis AC eam habet rationem ad suum parametrum AE, quam habet rectangulum ex AF in FC, sive quadratum HF semiaxis FC ad quadratum GF semiordinatæ, seu semiaxis BF (*Lib. IX. §. 75.*), sicuti quadratum HF est ad quadratum GF in ratione *duplicata* lateris FC ad latus BF (*Lib. IX. §. 172.*), ita axis AC est ad suum parametrum AE in ratione *duplicata* semiaxis FC ad semiaxim BF; ac proinde etiam totius axis AC ad totum axim BD (*Lib. I. §. 126.*), cum nempe sit AC . BD = FC . BF (§. 127.). Facta autem hypothesi, ut sit ∺ AC . BD . AE, ratio primæ AC ad tertiam AE est *duplicata* illius, quam habet eadem prima AC ad secundam BD (§. 177.). Ergo reipsa habetur ∺ AC . BD . AE; atque propterea unus axis &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Quadratum unius axis ellipseos adæquat figuram alterius axis sibi conjugati.

82. Quadratum nempe unius axis BD ellipseos ABCD adæquat figuram ACKE alterius axis sibi conjugati AC. Enimvero, cum axis BD sit media proportionalis inter alterum axim AC, & ejus parametrum AE (§. 81.), quadratum ipsius axis AD erit æquale rectangulo ACKE (*Lib. IX. §. 111.*). Hujusmodi autem rectangulum est figura axis AC (§. 78.). Ergo &c.

COROLLARIUM II.

Quadratum unius semiaxis ellipseos est æquale quadranti figuræ alterius axis.

83. Videlicet quadratum GF semiaxis BF ellipseos ABCD est æquale quartæ parti figuræ ACKE alterius axis AC. Quandoquidem bifariam divisis lateribus AE, AC rectanguli ACKE, constitutoque rectangulo AF*y*N, duo rectangula ACKE, AF*y*N erunt similia (§ 85.); adeoque rectangulum AF*y*N erit ad rectangulum ACKE in ratione *duplicata* lateris AF ad latus AC (*Lib.*

(*Lib. IX. §.* 170.) ; cumque sit $AF = \frac{AC}{2}$, rectangulum AFyN erit quarta pars rectanguli ACKE (*Ibid.*). Est autem eadem ratione etiam quadratum GF semiaxis GF quarta pars quadrati totius axis BD. Ergo quadratum GF est ad quadratum totius axis BD, ut rectangulum AFyN ad rectangulum ACKE. Quadratum porro totius axis BD adæquat rectangulum ACKE (§. 82.). Ergo etiam quadratum GF æquabit rectangulum AFyN (*Lib. I. §.* 128.).

Corollarium III.

Si circa majorem axim ellipseos describatur circulus, cujus peripheriæ occurrat tangens ducta ex puncto extremo axis minoris, tum ex illo puncto occursus agatur semiordinata ad majorem axim, rectangulum contentum sub correspondentibus portionibus ipsius axis erit æquale quadranti figuræ ejusdem axis.

84. Ut si describatur circulus AECF circa majorem axim AC ellipseos ABCD, atque ex puncto extremo D axis minoris BD ducatur tangens DQ Fig. 15.
occurrens peripheriæ ipsius circuli in puncto Q, ex quo ducatur ad axim T. XIII.
majorem AC semiordinata PQ, rectangulum contentum sub segmentis AP, PC axis AC semiordinatæ QP correspondentibus, erit æquale quadranti figuræ ipsius axis AC. Cum enim recta QP ad perpendiculum insistat diametro AC (§. 12.), rectangulum ex AP in PC erit æquale quadrato rectæ PQ (*Lib. IX. §.* 113.). Quadratum autem rectæ PQ est æquale quadrato semiaxis MD; cum rectæ PQ, MD sint æquales (*Lib. VI. §.* 20.). Ergo etiam rectangulum ex AP in PC erit æquale quadrato semiaxis MD (*Syn. Alg. §.* 161.). Quadratum porro semiaxis MD est æquale quadranti figuræ axis AC (§. 83.). Ergo eidem quadranti rectangulum quoque ex AP in PC erit æquale (§. 162.).

Corollarium IV.

Axes ellipseos sunt duæ mediæ continuo proportionales inter suos parametros.

85. Videlicet axis major BD ellipseos ABCD, & axis minor AC sunt Fig. 16.
duæ mediæ continuo proportionales inter suos parametros GC, DH. Est T. XIII.
enim GC. BD = BD. AC, sicuti etiam BD. AC = AC. DH (§. 81.). Ergo erit GC. BD = BD. AC = AC. DH.

THEO-

THEOREMA IX.

Quadratum cujusvis semiordinatæ ad axim ellipseos adæquat rectangulum contentum sub abscissa, & sub recta intercepta inter ipsum axim, & rectam regulatricem ipsi semiordinatæ correspondente.

86. Recta AC sit axis ellipseos ABCD, parameter recta AE, & regula-
Fig. 18. T. XIII. trix recta EC. Dico, quadratum cujusvis semiordinatæ *ba* æquare rectangulum *AbeM* contentum sub abscissa *Ab*, & sub recta *be*, quæ interjicitur inter axim AC, & rectam regulatricem EC, ipsique semiordinatæ *ba* correspondet.

Demonstratio.

Recta DF sit alter semiaxis ipsius ellipsis, adeoque una ex semiordinatis ad axim AC (*Syn. Alg.* §. 72.); semiordinatæ propterea *ba* paralleła (§. 17.). Igitur erit *be*. F*y* = *b*C. FC (*Lib. IX.* §. 59.). Et quoniam rectangulum A*be*M est ad rectangulum AF*y*N in ratione composita ex ratione basis A*b* ad basim AF, & ex ratione altitudinis *be* ad altitudinem F*y* (§. 105.), posita analogia *be*. F*y* = *b*C. FC, rectangulum A*be*M erit ad rectangulum AF*y*N in ratione quoque composita ex ratione rectæ A*b* ad rectam AF, & ex ratione rectæ *b*C ad rectam FC. Constat autem, rectangulum ex A*b* in *b*C esse ad rectangulum ex AF in FC in ratione composita ex ratione rectæ A*b* ad rectam AF, & ex ratione rectæ *b*C ad rectam FC (§. 105.), spectando nempe priores terminos, veluti illorum bases, & posteriores, veluti eorundem altitudines. Ergo ratio rectanguli A*be*M ad rectangulum AF*y*N diversa ab ea non erit, quam habet rectangulum ex A*b* in *b*C ad rectangulum ex AF in FC (*Lib. I.* §. 76.). Manifestum porro est, quadratum semiordinatæ *ba* esse ad quadratum semiordinatæ FD, ut est rectangulum ex A*b* in *b*C ad rectangulum ex AF in FC (§. 38.). Ergo quadratum semiordinatæ *ba* erit ad quadratum semiordinatæ FD itidem, ut rectangulum A*be*M ad rectangulum AF*y*N (§ 77.), & *alternando*, quadratum semiordinatæ *ba* erit ad rectangulum A*be*M, ut quadratum semiordinatæ FD ad rectangulum AF*y*N (§. 125.). Quadratum autem semiordinatæ FD adæquat rectangulum AF*y*N. (Quippe cum sit ∺ AC. BD. AE (§. 81.), atque insuper AE. F*y* = AC. FC (*Lib. IX.* §. 59); adeoque AE = 2F*y*, sicuti est AC = 2FC, & BD = 2FD, erit quoque ∺ AF. FD. F*y* (*Lib. I.* §. 126.), & ideo (*Lib. IX* §. 111.) rectangulum AF*y*N extremarum AF, F*y* erit æquale quadrato mediæ FD). Igitur etiam quadratum semiordinatæ *ba* æquabit rectangulum A*be*M (*Lib. I.* §. 128.). Eodem modo demonstrabitur, quadratum semiordinatæ PS æquare rectangulum ex AP in PR. Igitur quadratum &c. quod erat ostendendum.

Co-

COROLLARIUM I.

In ellipsi quadratum cujusvis semiordinatæ ad axim deficit a rectangulo contento sub parametro, & abscissa; atque hujusmodi defectus est rectangulum simile figuræ axis.

87. Videlicet quadratum cujusvis semiordinatæ *ba* ad axim AC in ellipsi ABCD minus est rectangulo A*bd*E contento sub parametro AE, & sub abscissa A*b*. Constat enim, quadratum semiordinatæ *ba* esse æquale rectangulo A*be*M, quod deficit a rectangulo A*bd*E quantitate rectanguli M*ed*E. Perspicuum quoque est, rectangulum M*ed*E esse simile rectangulo ACKE (*Lib. IX* §. 85.), quod est figura axis AC (§.78.).

COROLLARIUM II.

88. Hinc definiri etiam potest ellipsis, nulla quoque habita ratione coni: *Figura plana unica curva linea undique terminata, in qua semiordinatarum ad axim quadrata deficiunt a rectangulis sibi correspondentibus contentis sub parametro, & sub abscissis, & quidem ea constanti lege, ut hujusmodi defectus sint rectangula similia figuræ axis.*

SCHOLION.

89. Ex eo, quod in ellipsi quadrata semiordinatarum ad axim continue deficiant a rectangulis contentis sub parametro, & sub correspondentibus abscissis, conica hujusmodi sectio *ellipsis*, nempe *deficiens*, dicta est.

COROLLARIUM III.

In ellipsi semiordinata ad axim est media proportionalis inter abscissam, & rectam sibi correspondentem contentam inter axim, & rectam regulatricem.

90. Etenim iisdem positis; cum quadratum semiordinatæ *ba* adæquet rectangulum ex A*b* in *be* (§.38.), necessario erit ∺ A*b*. *ba*. *be* (*Lib.IX.*§.118.). Fig.18. T.XIII.

THEOREMA X.

In ellipsi ABCD quadratum cujusvis semiordinatæ ba *est duplum trapezii* A bz N, *quod semiparametro* AN, *abscissa* Ab, *recta* bz *inter axim, & subdirectricem intercepta, & subdirectrice* Nz *continetur.*

91. Ex vertice A ad punctum *e*, in quo regulatrix EC secat rectam *bd*, ducatur recta A*e*.

Demonstratio.

Fig. 18. T. XIII. Quoniam rectæ FN, CE sunt parallelæ (§. 80.), sicuti etiam rectæ AE, *ba* (§. 75.), quadrilaterum N*z**e*E erit parallelogrammum (*Lib. VI. §.* 8.); & ideo recta NE æquabit rectam *z e* (*ibid. §.* 20). Est autem AN = *z e* (§. 79.). Ergo erit etiam AN = *z e* (*Syn. Alg. §.* 262.). Anguli autem *x*AN, *x e z*, sicuti etiam *x*NA, *x z e*, utpote alterni parallelarum, sunt æquales inter se (*Lib. IV. §.* 15.). Ergo triangulum A*x*N erit æquale triangulo *z x e* (*Lib. V. §.* 93.); unde, si utrique adjiciatur trapezium A*b z x*, trapezium A*bz*N erit æquale triangulo *b*A*e* (*Syn. Alg. §.* 265.). Constat autem, rectangulum A*be*M esse duplum trianguli A*eb* (*Lib. VI. §.* 21.). Igitur rectangulum A*be*M duplum quoque erit trapezii A*bz*N (*Lib. I. §.* 102.). Quadratum autem semiordinatæ *ba* adæquat rectangulum A*be*M (§. 86.). Ergo etiam quadratum semiordinatæ *ba* erit duplum trapezii A*bz*N (§. 102.). Itaque in ellipsi &c. quod erat ostendendum.

LEMMA III.

In triangulo plano rectilineo recta ducta a vertice ad basim, in eadem proportione secat basim, & rectam ipsi basi parallelam.

92. A vertice *n* trianguli F*n*G ad basim FG, cui sit parallela recta *db* ducatur quomodocunque recta *n*B. Dico, esse *dy*. *yb* = FB. BG.

Demonstratio.

Fig. 17. T. XIII. Cum enim in triangulo F*n*B recta *dy* posita sit parallela basi FB, erit FB. *dy* = *n*B. *ny* (*Lib. IX. §.* 59.). Est autem eadem ratione etiam BG. *yb* = *n*B. *ny*. Ergo erit FB. *dy* = BG. *yb* (*Lib. I. §.* 78.), & *alternando*, *dy*. *yb* = FB. BG (§. 125.). Itaque in triangulo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

93. Si fuerit ∺ FB. BG. B*n*, erit etiam ∺ *dy*. *yb*. *yn*. Constat enim, esse *dy*. *yb* = FB. BG. Manifestum quoque est, esse *yb*. *yn* = BG. B*n* (*Lib.* IX. §. 60.). Ergo, si fuerit ∺ FB. BG. B*n*, erit etiam ∺ *dy*. *yb*. *yn*.

THEOREMA XI.

Si in ellipsi ABCD, cujus axis sit recta AC, parameter CH, subdirectrix EK, & semiordinata NF, fiat, ut recta MN ad semiordinatam NF, ita ipsa semiordinata NF ad rectam NL compositam ex abscissa NC, & ex segmento CL axi adjecto, recta LF conjungens puncta L, F erit tangens ellipsim in puncto F.

94. Sumto in recta LF quovis puncto x, ducatur ex illo ad axim AC semiordinata xb, quæ directe producta occurrat rectæ subdirectrici KE in puncto a, & jungantur puncta M, L recta ML. Fig. 1. T. XIV.

Demonstratio.

Quoniam ex hypothesi habetur ∺ MN . NF . NL, quadratum rectæ NF erit æquale rectangulo ex MN in NL (*Lib. IX. §. 111.*); adeoque sicuti rectangulum ex MN in NL est duplum trianguli MLN (*Lib. VI. §. 21.*), ejusdem quoque trianguli duplum erit quadratum rectæ NF (*Lib. I. § 102.*). Quadratum autem rectæ NF est duplum trapezii NMKC (§. 91.). Igitur trapezium NMKC erit æquale triangulo MLN (*Lib. I. §. 113.*). Quapropter, sublato communi trapezio MyCN, reliquum triangulum KMy erit æquale reliquo triangulo CyL (*Syn. Alg. §. 266.*); ipsumque triangulum CyL majus propterea erit trapezio aeyK, sicuti eodem trapezio majus est triangulum KMy. Unde, si utrique adjiciatur trapezium eyCb, triangulum eLb excedet trapezium abCK (*Ibid. §. 268.*). Rursus cum sit ∺ eb . bx . Lb (§. 93.), quadratum mediæ bx æquabit rectangulum extremarum eb, Lb (*Lib. IX. §. 111.*). Constat autem, rectangulum ex eb in Lb esse duplum trianguli eLb (*Lib VI. §. 21.*). Igitur ejusdem trianguli duplum quoque erit quadratum rectæ bx (*Lib. I. §. 102.*). Quadratum autem semiordinatæ bd est duplum trapezii aKCb (§. 91.). Ergo quadratum rectæ semiordinatæ bd erit ad trapezium aKCb, ut est quadratum rectæ bx ad triangulum eLb. Demonstravimus autem, trapezium aKCb deficere a triangulo eLb. Ergo etiam quadratum rectæ bd deficiet a quadrato rectæ bx (*Lib I. §. 128.*); & ideo etiam recta bd erit minor recta bx. Itaque punctum x cadit extra curvam ellipticam ABCD, & eadem ratione extra eandem curvam cetera quoque puncta ejusdem rectæ LF diversa a puncto F reperiuntur. Recta igitur LF tangit ellipsim in puncto F (§. 19.); ac proinde si in ellipsi &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Recta tangens ellipsim in unico puncto ipsam tangit.

95. Ostensum namque est, omnia puncta rectæ tangentis LF diversa a puncto F, in quo fit contactus, extra ellipticam curvam ABCD reperiri.

COROLLARIUM II.

96. Si in axe AC sumatur segmentum zN æquale rectæ MN, & ducatur recta zF, hæc erit tangenti LF perpendicularis. Quippe, cum sit per hypothesim ∺ MN. NF. NL, erit pariter ∺ zN. NF. NL; & ideo angulus zFL erit rectus, cum hæc sit proprietas trianguli rectanguli (*Lib. IX. §.* 74.).

DEFINITIO VIII.

97. Recta idcirco zF dicitur *normalis* tangenti LF, & recta zN *subnormalis*. Recta vero NL, quæ puncto concursus L, & semiordinatæ NF interjicitur, *subtangens* nuncupatur.

COROLLARIUM III.

98. In ellipsi semiparameter KC est ad subnormalem zN, ut est semiaxis EC ad distantiam EN semiordinatæ NF a centro E. Quandoquidem, cum sit zN = MN, erit LC. zN = EC. EN, quemadmodum est KC. MN = EC. EN (*Lib. IX. §.* 59.).

COROLLARIUM IV.

99. Producta semiordinata FN usque ad directricem AH, subtangens NL erit ad abscissam NC, ut est recta NT ad rectam NM. Enimvero, cum jam sit ∺ MN. NF. NL, rectangulum ex NM in NL erit æquale quadrato mediæ NF (§. 111.). Constat autem ex natura ellipseos, rectangulum ex TN in NC esse æquale quadrato ejusdem rectæ, nempe semiordinatæ NF (§. 38.). Ergo rectangula MN ⋈ NL, TN ⋈ NC erunt æqualia (*Syn. Alg. §.* 259.); ac proinde erit NL. NC = TN. NM (*Lib. IX. §.* 114.).

COROLLARIUM V.

100. Hinc, si jungantur puncta M, C recta MC, & puncta T, L recta TL, duæ hujusmodi rectæ MC, TL erunt parallelæ (§. 63.). Rursus recta
Fig. 1. T. XIV. linea LT transibit per punctum K, in quo parameter HC bifariam a subdirectrice EK dividitur. Quippe, cum rectæ AH, EK (§. 80.), sicuti etiam rectæ HC, TN (§. 75.), nec non rectæ TL, MC sint inter se parallelæ, duo quadrilatera THKM, TKCM erunt parallelogramma; & ideo opposita ipsorum latera TM, HK, sicuti etiam TM, KC erunt æqualia (*Lib. VI. §.* 20.). Igitur duo quoque HK, KC, utpote æqualia eidem TM, erunt inter se æqualia (*Syn. Alg. §.* 259.); adeoque &c.

COROLLARIUM VI.

101. Ex hoc sequitur, semiaxim EC esse mediam proportionalem inter rectas

rectas EL, EN. Quippe, cum in triangulo KEL rectæ KL, MC sint parallelæ, erit EL. EC = KE. EM (*Lib. IX. §. 55.*). Est autem etiam EC. EN = EK. EM; cum in triangulo quoque KEC rectæ MN, KC sint parallelæ (§. 75.). Igitur erit EL. EC = EC. EN (*Lib. I. §. 76.*), sive ∺ EL. EC. EN.

Corollarium VII.

102. Erit quoque in ellipsi AL. LC = AN. NC. Cum enim in triangulo TLA rectæ AT. EK sint parallelæ (*Lib. I. §. 76.*), sicuti etiam in triangulo TLN rectæ TN, KC (§. 75.), & in triangulo TNA rectæ TA, ME, perspicuum est, esse AL. AE = TL. TK, TL. TK = NL. NC (*Lib. IX. §. 57.*). Ergo erit AL. AE = NL. NC (*Lib. I. §. 76.*). Similiter cum sit AE. AN = TM. TN, & LC. LN = TM. TN (*Lib. IX. §. 57.*), erit AE. AN = LC. LN (*Lib. I. §. 76.*). Fieri igitur possunt duæ series magnitudinum *perturbatam proportionem* habentium, videlicet AL. AE. AN

LC. LN. NC.

Quippe constat ex modo demonstratis, primam AL esse ad secundam AE in prima serie, ut est secunda LN ad tertiam NC in secunda serie; in ista vero esse primam LC ad secundam LN, ut in illa est secunda AE ad tertiam AN. Igitur erit AL. AN = LC. NC (§. 181.), & *alternando*, AL. LC = AN. NC (§. 125.).

Corollarium VIII.

103. Ductis postremo tangentibus verticalibus AP, CR occurrentibus tangenti laterali PL in punctis P, R, erit quoque PL. LR = PF. FR. Quandoquidem, cum rectæ AP, CR sint parallelæ (*Lib. IV. §. 10.*), utpote ad perpendiculum insistentes axi AC (§. 24.) erit PL. RL = AL. LC (*Lib. IX. §. 57.*). Ducta vero ex vertice A per punctum contactus F recta AQ occurrens tangenti CQ in puncto Q, cum anguli AFP, RFQ sint æquales (*Lib. III. §. 51.*), sicuti etiam anguli PAF, FQR, nec non anguli APF, PRQ (*Lib. IV. §. 15.*), duo triangula AFP, RFQ, utpote æquiangula, erunt similia (*Lib. IX. §. 66*). Igitur erit PF. FR = AF. FQ (§. 67.). Est autem AF. FQ = AN. NC (§. 55.). Ergo erit PF. FR = AN. NC (*Lib. I. §. 76.*). Constat autem, esse AL. LC = AN. NC (*Lib. IX. §. 57.*). Ergo, cum jam demonstraverimus, esse PL. RL = AL. LC, & PF. FR = AN. NC, erit quoque PL. RL = PF. FR (*Lib. I. §. 76.*).

Theorema XII.

In ellipsi ABCD, cujus axis sit recta AC, ductis tangentibus verticalibus AP, CR, quæ tangenti laterali PL occurrant in punctis P, R, rectangulum contentum sub ipsis tangentibus verticalibus AP, CR, erit quarta pars rectanguli figuræ ipsius axis AC.

104. Ex puncto contactus F ordinetur ad axim AC recta FT, quæ di-

Fig. 1. T.XIV. recte producta occurrat directrici AH in puncto T, & jungantur puncta T, L recta TL, necnon ex vertice A per punctum F ducatur recta AQ occurrens rectæ tangenti CQ in puncto Q, & ex vertice C per idem punctum F recta CG, quæ concurrat in puncto G cum altera tangente AP in directum producta. Recta autem CH sit parameter axis AC.

Demonstratio.

Cum in triangulo HAQ rectæ HQ, TF sint parallelæ (§.75.), erit HC.CQ = TN. NF (§. 92.). Est autem eadem ratione etiam KC. CR = TN. NF. Ergo erit HC. CQ = KC. CR (*Lib. I.* §. 76.), & ideo HC. KC = CQ. CR (§. 125.). Manifestum est autem, esse HC = 2KC (§.79.). Igitur erit itidem CQ = 2CR, sive CR = RQ, adeoque CQ = 2QR. Præterea quoniam ob parallelismum rectarum AG, CQ, ut §. 103. demonstravimus, anguli GAQ, AQC sunt æquales, sicuti etiam anguli AGC, GCQ (*Lib. IV.* §. 15.), necnon anguli AFG, CFQ (*Lib.* III. §. 51.), utpote ad verticem oppositi, triangula AFG, CFQ erunt æquiangula, & ideo sibi mutuo similia (*Lib.* IX. §. 66., quemadmodum eandem quoque ob causam duo itidem triangula AFP, RFQ. Igitur erit GA. CQ = AF. FQ, sicuti etiam PA. RQ = AF. FQ (§.67.); atque propterea GA. CQ = PA. RQ (*Lib.* I. §. 76.); & hinc GA. PA = CQ. RQ (§. 125.). Ostensum porro est, esse CQ = 2RQ. Ergo erit etiam GA = 2PA. Ergo rectangulum ex AP in RQ, sive in CR erit in ratione *subquadrupla* ad rectangulum ex AG in CQ (*Lib.* IX. §. 170.). Rectangulum autem ex AG in CQ adæquet rectangulum figuræ axis AC, videlicet rectangulum ex parametro HC in ipsum axim AC. Quippe cum in triangulo ACG habeatur NF. NC = AG. AC (§. 60.) sitque insuper TN. NF = NF. NC (§. 90.), erit AG. AC = TN. NF (*Lib.* I. §. 76.). Demonstravimus autem, esse HC. CQ = TN. NF. Ergo erit AG. AC = HC. CQ (§. 76.), & ideo AG×CQ = AC×HC (*Lib.* IX. §. 107.). Quapropter sicuti rectangulum ex AP in CR est in ratione *subquadrupla* ad rectangulum AG×CQ, in eadem quoque ratione *subquadrupla* erit ad rectangulum AC×HC (*Lib.* I. §. 102.). Itaque in ellipsi &c. quod erat &c.

THEOREMA XIII.

Si per extrema puncta axis ellipseos, & recta per illius centrum transeuntis ducantur tangentes, quæ cum illis in directum productis concurrant, fient duo triangula inter se æqualia.

105. Recta AC sit axis ellipseos ABCD, per cujus centrum M transeat recta EM, & ducantur per extrema puncta A, E rectæ tangentes AK, EG, quæ cum ipsis AC, EM directe productis concurrant in punctis G, K. Dico, triangula MEG, KAM, quæ hinc emergunt, esse æqualia.

Fig. 2. T.XIV.

Demonstratio.

Ducta ex puncto E semiordinata EF ad axim AC, parallela propterea tan-

tangenti KA (*§.* 22.), cum duo triangula KMA, EMF sint similia (*Lib. IX.* triangulum KMA erit ad triangulum EMF in ratione *duplicata* lateris AM ad latus FM (*§.* 166.). Ratio autem rectæ GM ad rectam FM est *duplicata* illius, quam habet recta AM ad rectam FM (*Lib. I. §.* 177.); cum sit $\div$ GM. AM. FM (*§.* 101.). Ergo triangulum KAM erit ad triangulum EFM, ut GM ad FM (*Lib. I. §.* 78.). Perspicuum porro est, triangulum GEM esse ad triangulum FEM, ut est recta GM ad rectam FM (*Lib. IX §.* 96.), nimirum ut basis ad basim. Ergo triangulum GEM erit ad triangulum FEM, ut ad idem triangulum FEM se habet triangulum KAM (*Lib. I. §.* 76.), adeoque duo triangula GEM, KAM sunt æqualia (*§.* 103.). Itaque si per extrema &c. quod erat &c.

COROLLARIUM I.

106. Triangula EHK, HAG sunt inter se æqualia. Quandoquidem cum triangulum MEG adæquet triangulum KAM, ablato communi trapezio AHEM, reliquum triangulum EHK reliquo triangulo HAG erit æquale (*Syn. Al. §.* 266.).

COROLLARIUM II.

107. *Triangulum EGF adæquat trapezium KEFA.* Cum enim triangula MKA, MEG sint æqualia, ablato communi MEF, erit reliquum EGF reliquo KEFA æquale (*Ibid.*). Idipsum patet, si utrique triangulo EKH, HGA, quæ sunt æqualia (*Ibid. §.* 265.), trapezium HEFA adjiciatur.

COROLLARIUM III.

108. *Ducta ab extremo A axis AC recta AN parallela tangenti EG, triangulum KNA æquabit trapezium ENAG.* Ostenditur eodem modo, quo præcedens.

LEMMA IV.

Si fuerint tres magnitudines tribus aliis proportionales, excessus primæ supra secundam erit ad excessum ejusdem primæ supra tertiam in una serie, ut excessus primæ supra secundam in altera serie est ad excessum ejusdem primæ supra tertiam.

109. Tres magnitudines A, B, D sint proportionales tribus *a*, *b*, *d*, esto mirum A . B $=$ *a* . *b*, B . D $=$ *b* . *d*. Dico, esse A — B . A — D $=$ *a* — *b* . *a* — *d*.

Demonstratio.

Cum enim sit A . B $=$ *a* . *b*, erit A . *a* $=$ B . *b* (*Lib. I. §.* 125.), adeoque A — B . *a* — *b* $=$ A . *a* (*§.* 152.). Rursus quoniam stante hypothesi habetur A . D $=$ *a* . *d* (*Lib. I. §.* 179.), & ideo A . *a* $=$ D . *d* (*§.* 125.), erit quoque A — D . *a* — *d* $=$ A . *a* (*§.* 152.). Ostensum est autem, esse A — B . *a* — *b* $=$ A . *a*.

Ergo erit A — B. a — b = A — D. a — d (§.76.), atque adeo A — B. A — D = a — b. a — d (§.125.). Itaque si fuerint &c. quod erat ostendendum.

L E M M A V.

Latera homologa triangulorum æqualium, & similium sunt æqualia.

110. Sint duo triangula æqualia, & similia ABC, *abc*. Dico, latera ipsorum homologa esse inter se æqualia, nimirum AB = *ab*, BC = *bc*, & CA = *ca*.

Demonstratio.

Fig. 3. Fig. 4. T.XIV. Cum enim ipsa triangula sint æqualia, & similia, sibi mutuo necessario congruent. Igitur erit AB = *ab*, BC = *bc*, & CA = *ca* (*Lib. V.* §. 36.).

T H E O R E M A XIV.

Quævis recta linea transiens per centrum ellipsis ab illius axibus diversa, bifariam dividit omnes rectas parallelas tangenti ductæ per illius extremum.

111. In ellipsi ABCL esto recta quæcunque BL transiens per illius centrum E, diversa ab axibus ipsius ellipsis, atque per illius extremum punctum B ducatur recta BG, quæ ellipsim tangat, & cum axe AC directe producto concurrat in puncto G. Dico, rectam BL bifariam dividere omnes rectas ductas in ipsa ellipsi parallelas tangenti BG.

Demonstratio.

I.

Esto primo recta *da* parallela tangenti BG, quæ directe producta concurrat cum axe AC in puncto P; tum per puncta *a*, B, *d* ducantur ad
Fig. 5. T.XIV. axim AC semiordinatæ *ax*, BF, *d*R parallelæ tangenti AR, quarum *d*R cadat supra centrum E ipsius ellipsis, rectaque *xa* producatur in *b*. Quoniam igitur rectæ KA, BF, *n*R sunt parallelæ, triangula KEA, BEF, *n*ER erunt similia (*Lib. IX.* §. 65.); ac proinde triangulum KEA erit ad triangulum BEF, ut quadratum lateris AE ad quadratum lateris FE; erit vero idem BEF ad triangulum *n*ER, ut quadratum lateris FE ad quadratum lateris RE (§.281.). Ergo etiam excessus trianguli KEA supra triangulum BEF, nempe trapezium KBFA, erit ad excessum ejusdem trianguli KEA supra triangulum *n*ER, scilicet ad trapezium K*n*RA, ut excessus quadrati lateris AE supra quadratum lateris FE ad excessum ejusdem quadrati lateris AE supra quadratum lateris RE (§.109.), videlicet ut rectangulum ex AF in FC ad rectangulum ex AR in RC (§.49.), adeoque ut quadratum semiordinatæ BF ad quadratum semiordinatæ *d*R (§.38.). Est autem etiam triangulum BGF

BGF ad triangulum *d*PR, ut quadratum femiordinatæ BF ad quadratum femiordinatæ *d*R (*Lib. IX. §.* 181.); cum hujusmodi triangula, utpote æquiangula, quemadmodum rem attente confideranti perfpicuum fiet, fint fimilia (*§. 66.*). Ergo triangulum quoque BGF erit ad triangulum P*d*R, ut trapezium KBFA ad trapezium K*n*RA (*Lib. I. §.* 78.). Conftat autem, triangulum BGF æquare trapezium KBFA (§ 107.). Ergo etiam triangulum *d*PR æquabit trapezium K*n*RA (*Lib. I. §.* 128.). Eodem ratiocinio oftendam, triangulum *a*P*x* æquare trapezium K*bx*A. Hinc, fi triangulo *d*PR auferatur triangulum *a*P*x*, & trapezio K*n*RA dematur trapezium K*bx*A, erit trapezium *dax*R æquale trapezio *bn*R*x* (*Syn. Alg. §.* 266.); fique idcirco hifce trapeziis auferatur communis figura *aen*R*x*, reliquum triangulum *bea* æquabit reliquum triangulum *den* (§ 66.). Duo autem hujufmodi triangula funt fimilia (*Lib. IX*); cum angulus *bea* adæquet angulum *den* (*Lib. III. §.* 51.), angulus *bae* angulum *edn*, & angulus *abe* angulum *end* (*Lib. IV. §.* 15.). Ergo homologa ipforum latera *ae*, *ed* funt inter fe æqualia (§. 110.). Recta igitur *da* dividitur bifariam a recta BL.

I I.

Evanefcente triangulo *n*RE (fig. 5.) quod accidit, cum recta, five femiordinata *d*R tranfit per centrum ellipfis, duo triangula KEA, *d*PE (fig. 6.) erunt æqualia. Triangulum autem *a*P*x* adæquat trapezium K*bx*A, ut *num. præcedenti* demonftravimus. Ergo trapezium *dax*E æquabit triangulum *xb*E (*Syn. Alg. §.* 263.). Quamobrem, fublata communi figura *ae*E*x*, reliquum triangulum *bea* erit æquale reliquo triangulo *de*E (§. 266.). Ifta autem, utpote æquiangula, funt fimilia (*Lib. IX. §. 66.*). Ergo latera ipforum homologa *ae*, *ed* erunt æqualia (§. 110.); adeoque recta *da* fecta erit bifariam a recta BL.

I I I.

Quod fi recta parallela tangenti tranfeat per extremum axis AC, quemadmodum recta AB (fig. 2.) parallela tangenti EG, & ducta ex altero illius extremo B femiordinata BM, occurrat ifta centro M ellipfis, perfpicuum eft, rectam AB dividi bifariam a recta EL tranfeunte per centrum. Quippe, cum triangula KMA, BAM fint æqualia, ablato communi triangulo ANM, reliquum KNA reliquo BNM erit æquale (*Syn. Alg. §.* 263.); cumque duo ifta triangula, utpote æquiangula, fint fimilia (*Lib. IX. §. 66.*), æqualia erunt homologa ipforum latera BN, NA (§. 110.), five recta AB fecta erit bifariam a recta EL.

I V.

Spectetur recta *da* (fig. 7.), quæ ita fe habeat in ellipfi, ut fit parallela tangenti BG, fed producta ad partem *a*, concurrat cum axe AC in P, & recta *dm* femiordinata ad ipfum axim cadat infra centrum E ipfius ellipfis. Igitur producta recta *dm* in D, cum fit *dm* = *m*D, fi ducatur recta DM, quæ cum ipfa D*m* conftituat angulum *m*DM æqualem angulo P*dm*, triangulum *m*MD erit æquale triangulo *d*PM (*Lib. V. §.* 94), ex eo nimirum quod etiam anguli *dm*A, M*m*C fint æquales (*Lib. III. §.* 51.), atque infuper recta DM erit paral-

rallela rectæ *d*P (*Lib. IV. §.* 12.), adeoque etiam rectæ tangenti BG (§. 18.), necnon tangenti LN (*Ibid.*); cum tangentes BG, LN sint parallelæ (§. 63.). Ducta propterea tangente CF, quæ concurrat cum recta BL in F, triangulum *m*MD æquabit trapezium *m*CF*n*, ut *num. I.* demonstravimus. Quamobrem, si utrique adjiciatur triangulum *m*E*n*, triangulum *m*MD una cum triangulo *m*E*n* æquabit triangulum CEF (*Syn. Alg. §.* 265.). Triangulum autem KEA adæquat triangulum ECF (§. 74.), & triangulum *m*MD positum est æquale triangulo *d*P*m*. Ergo triangulum quoque *d*P*m* una cum triangulo *m*E*n* æquabit triangulum KEA. Ostensum est autem *num. I.* triangulum *a*P*x* æquare trapezium K*bx*A. Ergo, his sublatis, trapezium *xadm* una cum triangulo *m*E*n* erit æquale triangulo *b*E*x* (*Syn. Alg. §.* 266.), demtoque communi *xae*E, triangulum *bea* æquabit triangulum *den* (*Ibid.*). Duo autem hujusmodi triangula sunt similia (*Lib. IX. §. 66.*); cum sint æquiangula. Ergo æqualia inter se erunt homologa ipsorum latera *de*, *ea* (§. 110.); ac proinde recta *da* secta erit bifariam in puncto *e* a recta BL.

V.

Sit modo recta AD (fig. 5.), quæ occurrat extremo puncto A axis AC; semiordinata vero D*m* ad ipsum axim ducta ex altero extremo D rectæ AD, infra centrum E ipsius ellipsis itidem cadat. Eodem ratiocinio, quo *num. præcedenti* ostensum est, triangulum *d*P*m* (fig. 7.) una cum triangulo *m*E*n* æquare triangulum KEA, demonstrabitur, triangulum DA*m* (fig. 5.) una cum triangulo *m*E*t* æquare triangulum KEA. Igitur, sublato communi triangulo A*s*E, residuum triangulum D*st* æquabit triangulum K*s*A (*Syn. Alg. §.* 266.), quod itidem relinquitur. Cumque ista triangula D*st*, K*s*A, utpote æquiangula sint similia, habebunt latera homologa A*s*, *s*D inter se æqualia (§. 110), adeoque etiam in hoc casu recta DA secta erit bifariam a recta BL.

VI.

Nunc recta, quæ secatur a recta per centrum transeunte, ita se habeat in ellipsi, ut ipsius axim dispescat, esto nimirum recta FD (fig. 8.) divisa a recta *b*L transeunte per centrum E ellipsis FCM, sitque ipsa FD parallela tangenti *b*A, atque ex illius extremo F ducatur ad axim *a*C semiordinata F*u*, quæ supra centrum E ipsius ellipsis cadat. Ducta igitur ab extremo D recta D*b* parallela semiordinatæ F*n*, sicuti etiam tangenti H*a*, & per punctum *z* recta *zd* parallela tangenti *b*A, ut supra, eodem plane ratiocinio demonstrabitur, triangulum F*un* æquare trapezium H*mna*, quo *num. I.* ostensum est, triangulum *d*PR (fig. 5.) æquare trapezium K*n*RA. Igitur, sublato communi trapezio *uymn*, triangulum F*ym* æquabit trapezium *byue* (*Syn. Alg. §.* 266.). Triangulum autem *eu*D est æquale trapezio H*bea*; cum triangulum *eu*D adæquet triangulum *zde* (*Lib. V. §.* 94.), ob æqualitatem scilicet basium *ze*, *e*D (§. 17.), nec non angulorum *zed*, D*eu* (*Lib.* III. §. 51.), & *dze*, *e*D*u* (*Lib.* IV. §. 15.), ipsumque triangulum *zde* trapezio H*bea*, ut *num.* I. demonstravimus, sit æquale

le. Ergo triangulum *b*D*y* erit æquale trapezio H*yua*; adeoque etiam triangulo F*ym* (*Syn. Alg.* §.261.), quod trapezium ipsum H*yna* adæquat. Duo autem triangula *b*D*y*, F*ym*, utpote æquiangula, sunt similia. Ergo æqualia erunt inter se homologa ipsorum latera F*y*, *y*D, rectaque idcirco FD a recta *b*L bifariam dividitur.

VII.

Ab eadem recta *b*L (fig. 8.) secta fit recta NM, ex cujus extremo M ducta semiordinata ME ad axim *a*C, transeat ipsa per centrum E ipsius ellipsis. Ex altero illius rectæ extremo N ducatur ordinata N*h* ad axim *a*C, & posita PK = PR, ductaque recta K*h*, constituatur triangulum PK*h*. Igitur, quemadmodum triangulum F*un* adæquat trapezium H*mna*, ita, si evanescat triangulum *m*E*n*, transeunte nimirum recta F*n* per centrum E, sicuti per ipsum transit recta EM, triangulum RME æquabit triangulum ECS. Quamobrem, demto communi triangulo RGE, residuum triangulum EGM erit æquale residuo trapezio GRCS (§.266.). Triangulum autem RNP adæquat trapezium PCS*x*, utpote æquale triangulo K*h*P (sicuti *num. præcedenti* ostensum est de triangulis *zde*, *eu*D) cui trapezium ipsum PCS*x* est æquale (§.107.). Ergo, sublato trapezio PCS*x* a trapezio GRCS, additoque triangulo RNP ipsi residuo RP*x*G, triangulum GN*x* æquabit trapezium RCSG; ac proinde etiam triangulum EGM (*Syn. Alg.* §.261.). Sunt autem duo ista triangula sibi mutuo similia; cum sint æquiangula. Igitur æqualia erunt latera ipsorum homologa NG, GM; adeoque &c.

VIII.

Postremo esto recta *d*D (fig. 9.) secta a recta BL, eaque ita se habeat in ellipsi, ut semiordinata *dm* ad axim AC cadat infra centrum E. Ductis itaque rectis, ut supra, prout figura ostendit, triangulum *m*MQ erit æquiangulum triangulo *d*R*m*, adeoque illi æquale ob æqualitatem semiordinatarum, sive basium *dm*, *m*Q. Quoniam igitur triangulum *m*MQ adæquat trapezium *m*CF*n*, quemadmodum (fig. 7.) triangulum *m*MD adæquat trapezium *m*CF*n* ex *n. IV.*, triangulum quoque *d*R*m* eidem trapezio *m*CF*n* erit æquale (*Syn. Alg.* §.261.). Quamobrem, si utrique adjiciatur triangulum *m*E*n*, figura *d*RE*nd* æquabit triangulum ECF (§.265.). Triangulum autem KEA est æquale triangulo ECF (§.74). Ergo figura *d*RE*nd* etiam triangulo KEA erit æqualis (*Syn. Alg.* §.261.). Hinc, demto utrique triangulo *e*RE, triangulum *den* æquabit trapezium K*e*RA (§.266.). Triangulum porro *x*RD adæquat trapezium K*bx*A, sicuti ex *num. præcedenti* triangulum NRP (fig. 8.) est æquale trapezio PCS*x*. Ergo, addito utrique trapezio *bx*R*e*, triangulum *b*D*e* æquale erit trapezio K*e*RA (§.265.); adeoque etiam triangulo *den* (§.261.). Cumque duo hujusmodi triangula *b*D*e*, *den*, utpote æquiangula, sint similia, æqualia erunt latera ipsorum homologa *de*, *e*D; ac proinde recta *d*D secta est bifariam in puncto *e* a recta BL. Igitur recta quæcunque transiens per centrum ellipsis diversa ab illius axibus &c. quod erat ostendendum.

Co-

COROLLARIUM I.

In ellipsi recta quaecunque diversa ab axibus transiens per illius centrum est diameter secundaria.

112. Bifariam siquidem dividit omnes rectas parallelas tangenti ductae per illius extremum, prout requiritur, ut ellipseos diameter dici queat (§. 11.).

COROLLARIUM II.

Axis major ellipseos est omnium diametrorum maxima, minima vero axis minor.

113. Videlicet axis major AC ellipsis ABCD est maxima omnium diametrorum. Quippe est maxima omnium rectarum, quae per ellipseos centrum transeunt. Descripto enim circulo AECF circa ipsum axim, ducta-
Fig.15. que per centrum M recta quacunque *bm*, cum tota peripheria circuli extra curvam ellipticam reperiatur (§. 54.), recta quoque *bm* extra eandem curvam excurret. Quamobrem recta *bm* major erit diametro *ny*. Est autem AC$=$*bm* (*Lib. VII.* §. 11.) Ergo axis quoque AC erit major diametro *ny*, & eadem ratione omnes alias diametros axis ipse AC excedet. Eodem ratiocinio palam fiet, minorem axim AC ellipsis ABCD esse minimam om-
Fig.16. nium diametrorum ejusdem. Quandoquidem ducta diametro *yb*, descripto-
T.XIII. que circa minorem axim AC circulo AECF, cum tota ipsius circuli peripheria cadat intra curvam ellipticam (§. 54.), sitque propterea $zx < yb$, erit etiam AC$<yb$, ex eo nimirum quod sit AC$=xz$ (*Lib.* VII. §. 11.).

COROLLARIUM III.

Tam diametri, quam semidiametri ellipseos eo minores sunt, quo magis a majori ipsius axe recedunt.

114. Etenim quo magis recedunt a majori axe, recedunt magis a maxima diametro, & accedunt ad minimam.

SCHOLION.

115. Hinc patet discrimen maximum ellipseos a circulo. Omnes namque diametri in circulo sunt aequales inter se, minime vero in ellipsi, idque profecto ex eo, quod quadrata semiordinatarum ad axim in ellipsi non sint, quemadmodum in circulo, aequalia rectangulis, quae sub correspondentibus portionibus ipsius axis continentur.

THEO-

THEOREMA XV.

Quadrata semiordinatarum ad quamlibet secundariam diametrum ellipseos sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus ipsius diametri.

116. Recta BL sit una ex diametris secundariis ellipseos ABCL, ejusque axis AC. Ducantur autem ad ipsam diametrum BL semiordinatæ *ea*, MA, *n*D. Dico quadratum semiordinatæ *ea* esse ad quadratum semiordinatæ MA, ut rectangulum ex B*e* in *e*L ad rectangulum ex BM in ML. Quadratum quoque semiordinatæ MA esse ad quadratum semiordinatæ *n*D, ut est rectangulum ex BM in ML ad rectangulum ex B*n* in *n*L. Fig. 6. T. XIV.

Demonstratio.

Per extrema puncta B, A diametrorum BL, AC ducantur tangentes BG, AK, quæ cum ipsis concurrant in punctis K, G, & per punctum *a* ducatur recta *bx* parallela tangenti KA. Quoniam igitur, ut §. 111. *num. 1.* demonstravimus, triangulum *a*P*x* adæquat trapezium K*bx*A, si utrique dematur commune trapezium z*ax*A, residuum triangulum zAP erit æquale residuo trapezio K*baz* (*Syn. Alg.* §. 266.); quibus si addatur trapezium HzPG, triangulum HAG erit æquale duobus trapeziis K*baz*, HzPG (*Syn. Alg.* §. 263.). Triangulum autem BHK adæquat triangulum HAG (§. 106.). Ergo triangulum quoque BHK æquabit duo trapezia K*baz*, HzPG (*Syn. Alg.* §. 261.), ac proinde, si trapezium K*by*H auferatur trapezio K*baz*, necnon triangulo BHK; trapezium vero, quod ex illa subductione relinquitur, nempe H*yaz*, adjiciatur trapezio HzPG, triangulum B*by* erit æquale toti trapezio G*ya*P; his autem addito trapezio B*yae*, triangulum *bae* æquabit trapezium GB*e*P (§. 266.). Constat porro, triangulum AMK æquare trapezium BMAG (§. 108.). Ergo triangulum *bae* erit ad triangulum AMK, ut est trapezium GB*e*P ad trapezium BMAG. Duo autem illa triangula, utpote æquiangula, sunt similia (*Lib. IX* §. 66.), adeoque sunt inter se, ut quadrata suorum laterum homologorum *ea*, MA (§. 181.). Ergo quadratum semiordinatæ *ea* erit ad quadratum semiordinatæ MA, ut est trapezium GB*e*P ad trapezium GBMA (*Lib. I.* §. 78.), nempe ut excessus trianguli BEG supra triangulum MAE. Hujusmodi autem excessus sunt directe inter se, ut excessus quadrati lateris BE supra quadratum lateris *e*E ad excessum quadrati ejusdem lateris BE supra quadratum lateris ME (§. 109.); cum ob parallelismum rectarum BG, *e*P, MA triangula BGE, *e*PE, MAE sint similia (*Lib. IX.* §. 65.), adeoque proportionalia quadratis laterum BE, *e*E, ME (§. 181.). Ergo etiam quadratum lateris, seu semiordinatæ *ea* erit ad quadratum semiordinatæ MA, ut est excessus quadrati lateris BE supra quadratum lateris *e*E ad excessum quadrati ejusdem lateris BE supra quadratum lateris ME (*Lib. I.* §. 78.), videlicet ut rectangulum ex B*e* in *e*L ad rectangulum ex BM in ML (§. 49.).

Rur-

Rursus ducta per extremum D semiordinatæ *n*D recta D*x* ordinata ad axim AC, parallela tangenti AK, eaque producta in *b*, nec non per punctum *a* ducta recta *a*P parallela tangenti BG, cum rectæ *ax*, *x*D sint æquales; sicuti etiam anguli *ax*P, D*xm* (*Lib. III. §.* 51.), nec non anguli *xa*P, *x*D*m* (*Lib. IV. §.* 15.), duo triangula *a*P*x*, *xm*D erunt æqualia (*Lib. V. §.* 94.). Quamobrem, si utrique adjiciatur idem spatium *xaenmx*, trapezium P*enm* æquabit trapezium D*aen* (*Syn. Alg. §.* 265.); his vero addito triangulo *aeb* trapezium P*enm* una cum triangulo *aeb* erit æquale triangulo D*bn*. Ostensum est autem, triangulum *bae* esse æquale trapezio B*e*PG, ut proinde trapezium B*nm*G adæquet trapezium P*enm* una cum triangulo *aeb* (*Ibid.*). Ergo triangulum quoque D*bn* æquabit trapezium GB*nm* (*Ibid. §.* 262.). Demonstravimus autem, triangulum KMA esse æquale trapezio BMAG. Igitur triangulum KMA erit ad triangulum *bn*D sibi simile (*Lib. IX. §.* 66.), utpote sibi æquiangulum, ut est trapezium GBMA ad trapezium GB*nm*, nempe ut excessus trianguli GBE supra triangulum AME ad excessum ejusdem trianguli BEG supra triangulum *mn*E; ac proinde ut excessus quadrati lateris BE supra quadratum lateris ME ad excessum ejusdem quadrati lateris BE supra quadratum lateris *n*E (§. 109.), videlicet ut rectangulum ex BM in ML ad rectangulum ex B*n* in *n*L (§. 49.). Ergo quadrata semiordinatarum &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Quadrata ordinatarum ad quamlibet secundariam diametrum ellipseos sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus ipsius diametri.

117. Quadrata namque *ordinatarum* sunt inter se, ut quadrata *semiordinatarum* (*Lib. I. §.* 188.); cum ordinatæ ad diametrum sint directe inter se, ut semiordinatæ ad eandem (*Ibid. §.* 57.).

COROLLARIUM II.

Tam ordinatæ, quam semiordinatæ ad quamlibet secundariam diametrum ellipsis æqualiter distantes a suo vertice respective, aut a centro, sunt æquales.

118. Demonstratur eodem modo, quo §. §. 43. 44. 45. idipsum ostensum est de *ordinatis*, & *semiordinatis* ad majorem axim.

Co-

COROLLARIUM III.

Si diametri conjugatæ ellipseos fuerint æquales, quadrata semiordinatarum erunt æqualia rectangulis, quæ sub correspondentibus portionibus ipsius diametri continentur.

119. Ut si diametri conjugatæ AB, *ed* ellipseos A*e*D fuerint æquales; quadratum cujusvis semiordinatæ *mb* æquabit rectangulum ex A*m* in *m*B. Fig. 9.
Etenim, cum quadratum semiordinatæ *mb* sit ad quadratum semiordinatæ T.XIII.
nd, ut rectangulum ex A*m* in *m*B ad rectangulum ex A*n* in *n*B (§. 116.) sicuti propter hypothesim quadratum semiordinatæ *nd* adæquat rectangulum ex A*n* in *n*B, ita quadratum semiordinatæ *mb* æquabit rectangulum ex A*m* in *m*B (*Lib. I.* §. 128.).

SCHOLION.

120. Quamvis ergo quadrata semiordinatarum ad axim tam majorem, quam minorem ellipseos non sint æqualia rectangulis, quæ sub correspondentibus portionibus ipsorum axium continentur, id tamen verum universaliter non est de quadratis semiordinatarum ad quamlibet diametrum.

COROLLARIUM IV.

Quadrata semiordinatarum ad quamlibet secundariam diametrum ellipseos habent omnia eandem rationem ad rectangula, quæ sub correspondentibus portionibus ipsius diametri continentur.

121. Demonstratur eodem modo, quo §. 56. idipsum ostensum est de quadratis semiordinatarum ad axim.

SCHOLION.

122. *Parameter* propterea cujusvis secundariæ diametri ellipseos est *recta ducta per verticem ipsius diametri, ejus ordinatis parallela, & ideo ellipsim tangens, cujus ratio ad ipsam diametrum eadem est cum illa, quam habet quadratum cujuslibet semiordinatæ ad rectangulum contentum sub correspondentibus portionibus ipsius diametri*. Quæcumque idcirco superiori loco ostensa sunt de *parametro* axis, intelligi etiam debent de *parametro* alterius cujusvis diametri secundariæ, si ad sibi conjugatam diameter ipsa referatur, videlicet

I.

123. *Quævis secundaria diameter ellipseos est media proportionalis inter diametrum sibi conjugatam, ejusque parametrum*. Ut si recta AB in ellipsi Fig.10. T.XIV.
ADBC

ADBC fuerit diameter conjugata diametro CD, cujus *parameter* ſit recta CF, erit ∺ CD. AB. CF. (§. 81.).

II.

124. *Quadratum cujuſvis diametri ſecundariæ adæquat rectangulum contentum ſub diametro illi conjugata, & ſub illius parametro* (§. 82.).

III.

125. *Quadratum vero ſemidiametri ſecundariæ eſt quarta pars rectanguli contenti ſub diametro ſibi conjugata, & ſub illius parametro* (§. 83.).

IV.

126. *Conjugatæ diametri ellipſeos ſunt duæ mediæ continue proportionales inter ſuos parametros.* Si nimirum rectæ AB, CD fuerint diametri conjugatæ ellipſeos ADBC, & earum parametri rectæ AE, CF, erit ∺ AE. CD. AB. CF (§. 85.).

V.

127. Hinc, *ſi diametri conjugatæ fuerint æquales, etiam earum parametri erunt æquales tum inter ſe, tum cum ipſis diametris. Inæquales vero, ſi diametri fuerint inæquales.*

VI.

128. *Similiter ex diametris conjugatis illa, quæ major eſt, habet parametrum tum ſeipſa, tum altera diametro minorem. Illa vero, quæ eſt minor, habet parametrum etiam altera diametro majorem.* Hinc

VII.

129. Cum axes ellipſeos ſint diametri conjugatæ (§. 31.), & axis major ſit omnium diametrorum maxima; minima vero axis minor (§. 113.), *parameter axis majoris erit minimus omnium parametrorum aliarum diametrorum ellipſis, omnium vero maximus, parameter axis minoris.*

VIII.

130. Quoniam autem diametri ſecundariæ in ellipſi eo ſunt minores, quo magis a majori axe recedunt (§. 114.) *parameter diametri ſecundariæ major erit, quo diameter ipſa remotior a majori axe, & minori proximior efficitur.*

THEO-

THEOREMA XVI.

Omnis diameter ellipsim bifariam dividit; quadrifariam vero diametri conjugatæ; & sectores elliptici ad verticem oppositi inter se sunt æquales.

I.

131. Recta CD sit diameter quæcunque ellipsis CADB. Dico, ellipsim CADB ab ipsa diametro CD bifariam dividi.

Demonstratio.

Per singula puncta ipsius diametri ducantur ordinatæ XZ, MN, AB, *mn*, *xz*, quæ divisæ erunt bifariam in punctis *a*, *b*, G, *d*, *e* (§. 17.). Igitur elementa componentia segmentum ellipticum DCA sunt numero, & magnitudine æqualia elementis constituentibus segmentum ellipticum CDB. Ergo elliptica hujusmodi segmenta sunt æqualia (*Lib. IX.* §. 52.); adeoque &c. Fig. 10. T. XIV.

I I.

132. Rectæ AB, CD sint diametri conjugatæ ellipseos CADB: Dico, ellipsim CADB dividi quadrifariam ab ipsis diametris.

Demonstratio.

Etenim, iisdem positis, cum diameter AB sit una ex ordinatis ad diametrum CD (§. 71.), sintque omnes ordinatæ ad diametrum CD bifariam divisæ (§. 17.), sector AGC æquabit sectorem CGB, & sector AGD sectorem BGD (*Lib. IX.* §. 53.), ex eo nimirum, quod eorum elementa sint numero, & magnitudine æqualia. Æquales sunt autem eandem quoque ob causam etiam sectores AGC, AGD, nec non sectores CGB, BGD, cum sit $bM = dm$, $aX = ex$, $bN = dn$, & $aZ = ez$ (§. 118.), ob æqualem harum semiordinatarum distantiam a centro, totque puncta sint in recta GC, quot sunt in recta GD (§. 68.). Ergo quatuor sectores AGC, AGD, CGB, BGD sunt inter se æquales; ac proinde &c.

I I I.

133. Rectæ AB, CD sint duæ quæcunque diametri ellipseos ADBC. Dico, sectores ad verticem oppositos AGC, DGB, sicuti etiam AGD, CGB, esse inter se æquales.

Demonstratio.

Segmentum ellipticum DCA adæquat segmentum ABD; cum utrumque sit medietas ipsius ellipsis (§. 131.). Ergo, ablato communi AGD, reliquum AGC erit reliquo DGB æquale (*Syn. Alg.* §. 266.). Eodem modo ostendam, sectorem AGD æquare sectorem CGB. Igitur omnis diameter &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XVII.

Si ex punctis extremis cujusvis diametri ellipseos ducantur intra ellipsim duæ rectæ parallelæ, illæ æquales erunt inter se, & recta illas conjungens erit diameter ipsius ellipsis.

Fig. 17. T XIII. Recta *ab* sit diameter ellipsis ACBD, atque ex illius extremis punctis *a*, *b* ducantur intra ellipsim rectæ parallelæ *ae*, *bd*, quarum extrema *d*, *e* jungantur recta *de*.

I.

134. Dico primo, rectas *ae*, *bd* esse inter se æquales.

Demonstratio.

Quoniam rectæ *ae*, *bd* sunt parallelæ, erunt ordinatæ ad aliquam diametrum ipsius ellipsis. Sit ergo hujusmodi diameter recta AB. Itaque cum rectæ *ae*, *bd* sint parallelæ, anguli *eab*, *abd* erunt æquales (*Lib. IV.* §. 15.). Æquales sunt autem etiam anguli *anz*, *ynb* (*Lib. III.* §. 51.). Igitur duo triangula *nza*, *nby* habent duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri. Habent porro etiam latera *an*, *nb* æqualia, quæ æqualibus angulis adjacent (§. 68.). Ergo latera quoque *az*, *yb* erunt æqualia (*Lib. V.* §. 93.). Constat porro, esse *ae*, $db = az$, *by* (*Lib. I.* §. 127.); cum sit $ae = 2az$, & $db = 2yb$ (§. 17.). Ergo etiam rectæ *ae*, *db* erunt inter se æquales (*Lib. I.* §. 128.).

II.

135. Dico 2. rectam *de* esse diametrum ellipseos ACBD.

Demonstratio.

Quandoquidem recta conjungens extrema puncta *d*, *e* rectarum *db*, *ae* transit per centrum *n* ellipsis ACBD. Etenim, si fieri potest, cadat hujusmodi recta extra centrum *n*, ut linea *dxe*. A centro autem *n* ad extrema puncta *d*, *e* ducantur rectæ *nd*, *ne*. Cum igitur ob parallelismum recta-

rum

rum *ae*, *db* anguli alterni *eab*, *abd* sint æquales (*Lib. IV. §.* 15.), ficuti etiam rectæ *an*, *nb* (§. 68.), nec non rectæ *ae*, *db* (§. 118.), bases quoque *ne*, *nd* triangulorum *nae*, *nbd* erunt æquales (*Lib. V. §.* 73.). Duo ergo triangula *nae*, *nbd* sunt inter se mutuo æquilatera; ac propterea habent angulos *ane*, *dnb* æqualibus lateribus *ae*, *db* oppositos, inter se æquales (§. 85.). Igitur duæ rectæ *nd*, *ne* sunt in directum positæ, seu unam rectam *dne* constituunt (*Lib. III. §.* 55.). Posita est autem recta etiam linea *dxe*. Ergo duæ rectæ *dxe*, *dne* spatium claudunt, quod repugnat (*Lib. IV. §.* 7.). Igitur recta conjungens extrema puncta *d*, *e* transit per centrum ellipsis ACBD; ac proinde est illius diameter (§. 112.). Si ergo ex punctis extremis &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XVIII.

Si in majori axe AC ellipseos AMNC duo sumantur puncta a, b, *quorum ea sit distantia a suo respective vertice A, C, ut tam rectangulum ex A*a *in* a*C, quam rectangulum ex C*b *in* b*A sit æquale quadranti figuræ ipsius axis AC, rectæ* az, bz *ductæ ex illis punctis* a, b *ad quodvis punctum* z *curvæ ellipticæ, æquales angulos* az*E,* bz*F constituunt cum recta tangente EF per illud punctum* z *traducta.*

136. Ducantur tangentes verticales AE. CF occurrentes tangenti laterali EF in punctis E, F. Ipsa vero EF, sicuti etiam axis AC directe producantur, donec simul in puncto D concurrant. Tum ex datis punctis *a*, *b* ducantur ad puncta E, F rectæ *a*E, *a*F, *b*E, *b*F. Fig. 11. T. XIV.

Demonstratio.

Quoniam igitur ex facta hypothesi rectangulum ex A*a* in *a*C est æquale quadranti figuræ axis AC; eidem vero quadranti æquale itidem sit rectangulum ex AE in CF (§. 104.), rectangula CF ⨯ AE, *a*C ⨯ A*a* erunt inter se æqualia (*Syn. Alg §.* 259.); & hinc habebitur CF. *a*C = A*a*. AE (*Lib. IX. §.* 114.). Duo autem anguli *a*CF, *a*AE sunt æquales inter se (*Lib. III. §.* 37.), utpote recti (§. 24.). Ergo duo triangula *a*CF, *a*AE erunt similia (*Lib. IX. §.* 69.), & anguli C*a*F, AE*a*, qui proportionalibus lateribus continentur, erunt æquales (§. 1.). Duo autem anguli A*a*E, *a*EA valent unum rectum (*Lib. V. §.* 47.). Igitur duo quoque anguli C*a*F, A*a*E simul sumti unum rectum æquabunt (§. 40.). Tres porro anguli A*a*E, E*a*F, C*a*F conficiunt summam duorum rectorum (*Lib. III. §.* 42.). Igitur, sublatis angulis A*a*E, C*a*F unum rectum æquantibus, reliquus E*a*F erit uni recto æqualis, seu erit rectus. Haud dissimili ratiocinio palam fiet, etiam angulum E*b*F esse rectum. Igitur, cum angulus rectus in semicirculo consistat (*Lib. VII. §.* 78.), bifariam diviso latere EF in puncto *y*, semicirculus descriptus centro *y*, intervallo *y*E transibit per puncta *a*, *b*, ut semicirculus E*ab*F; ac

D 2 pro-

proinde anguli A*b*E, *a*FE, utpote in eadem circuli portione consistentes, erunt inter se æquales (*Lib. IV.* §. 15.).

Modo per punctum E ducatur recta *de* parallela rectæ *b*F, quæ concurrat in puncto *e* cum recta *b*z directe producta, occurrat vero rectæ DC in puncto *d*. Cum itaque anguli *e*Ez, zF*b*, sicuti etiam anguli E*e*z, z*b*F, sint æquales (*Lib.* IV. §. 15.), quatenus sunt alterni; æquales itidem sint anguli ad verticem oppositi Ez*e*, *b*zF (*Lib.* III. §. 51.), duo triangula Ez*e*, z*b*F erunt similia (*Lib.* IX. §. 66.); ac proinde habebitur *b*F. E*e* = Fz. zE (§. 67. 77.). Manifestum est autem, esse Fz. zE = FD. ED (§. 103.), & *b*F. *d*E = FD. DE (*Lib.* IX. §. 59.). Ergo erit *b*F. E*e* = *b*F. *d*E (*Lib.* I. §. 76.), & ideo E*e* = *d*E (§. 103.). Angulus autem *d*E*b* est rectus; cum sit æqualis angulo alterno E*b*F (*Lib.* IV. §. 15.), qui itidem est rectus, ut supra demonstravimus. Ergo angulus quoque *e*E*b* erit rectus, duoque idcirco triangula *b*E*d*, E*be*, ita erunt æqualia, ut angulus E*be*, sive E*b*z, adæquet angulum *db*E, seu *ab*E (*Lib. V.* §. 82.); & ideo, cum ostensum fuerit, angulum *a*Fz æquare angulum *ab*E, angulus *a*Fz angulo itidem E*b*z erit æqualis (*Syn. Alg.* §. 263.). Constat porro, æquales angulos in eadem circuli portione consistere (*Lib. VII.* §. 73.). Igitur in eadem circuli portione erunt anguli *a*Fz, E*be*, sive *xb*z; adeoque describi poterit circulus z*xb*F transiens per puncta z, *x*, *b*, F; proinde circumscribens quadrilaterum z*xb*F. Omnis autem quadrilateri circulo inscripti duo quolibet oppositi anguli valent duos rectos (§. 82.). Ergo duo anguli *xb*F, *x*zF quadrilateri z*xb*F erunt æquales duobus rectis; cumque angulus *xb*F jam ostensus sit rectus, rectus similiter erit angulus *x*zF; atque adeo etiam angulus *x*zE, quod duo *x*zF, *x*zE simul sumti valeant duos rectos (*Lib. III.* §. 40.). Recta igitur *x*z ad perpendiculum insistit rectæ tangenti DF (§. 24.).

Rursus quoniam etiam in quadrilatero *ax*zE duo oppositi anguli E*ax*, *x*zE sunt recti, circulus ei circumscribi poterit circa latus E*x*, qui nimirum transeat per quatuor puncta *a*, *x*, z, E quemadmodum circulus z*xb*F transit eandem ob causam per quatuor puncta z, *x*, *b*, F quadrilateri z*xb*F. Igitur duo anguli *ax*E, *a*zE, utpote in eadem portione *ax*zE circuli E*a*xz consistentes, erunt inter se æquales (*Lib.* VII. §. 73.). Eadem ratione æquales erunt inter se duo itidem anguli *bx*F, *b*zF, quatenus nempe etiam ipsi reperiuntur in eadem portione *bx*zF circuli *b*Fz*x*. Duo autem anguli *ax*E, *bx*F sunt inter se æquales (*Lib.* III. §. 51.). Ergo æquales erunt inter se duo itidem *a*zE, *b*zF (*Syn. Alg.* §. 259.). Itaque si in majori axe &c. quod erat &c.

COROLLARIUM I.

137. Hinc omnes luminis radii incidentes ex puncto *b* in curvam ellipticam ANC, ut radii *b*N, *b*M, ita ex illa resiliunt, ut in puncto *a* omnes simul colligantur. Similiter omnes, qui ex puncto *a* erumpentes, incidunt in eandem curvam, vicissim in puncto *b* omnes simul post reflexionem uniuntur. Enimvero, cum ex *Catoptrica* reflexio luminis ex speculi superficie ea lege perpetuo fiat, ut angulus

us reflexionis sit æqualis angulo incidentiæ, & hujusmodi anguli spectentur in curva superficie penes rectam tangentem curvam ipsam superficiem in puncto incidentiæ, res perspecta est, omnes radios luminis, qui ex puncto *b* incidunt in curvam ellipticam ANC, reflecti ex illa non posse, quin omnes transeant per punctum *a*, & vicissim quin transeant per punctum *b*, qui ex puncto *a* in eandem curvam cadunt. Ductis namque tangentibus *zu*, *mn* per puncta incidentiæ N, M, constat, angulos *b*N*u*, *a*Nz, sicuti etiam *a*M*m*, *b*M*n*, esse inter se æquales. Duo igitur puncta *a*, *b* sunt *foci*, sive *umbilici* ellipseos ANC (§. 83.).

COROLLARIUM II.

138. Quamobrem *foci*, sive *umbilici* ellipseos sunt *duo puncta axis majoris, quorum utrumque ita distat a suo vertice, ut rectangulum contentum sub axis portionibus per eorum alterum abscissis, quartam partem figuræ ipsius axis adæquet.*

COROLLARIUM III.

Uterque focus ellipseos ita distat a suo vertice, ut rectangulum contentum sub segmentis axis ab illo determinatis, sit æquale quadrato minoris semiaxis.

139. Ut si foci ellipseos ABCD sint puncta *a*, *d*, & minor axis AC, rectangulum ex B*a* in *a*D, sicuti etiam rectangulum ex D*d* in *d*B, erit æquale quadrato minoris semiaxis A*b*. Constat enim, hujusmodi quadratum esse æquale quadranti figuræ majoris axis BD (§. 83.), cui illa itidem rectangula sunt æqualia.

THEOREMA XIX.

Recta linea ducta ex foco ellipseos ad extremum minoris axis est æqualis semiaxi majori.

140. Ex foco *d* ellipseos ABCD ducatur ad extremum A minoris axis CA recta *d*A. Dico, rectam *d*A esse æqualem majori semiaxi D*b*.

Demonstratio.

Cum rectangulum ex D*d* in *d*B sit æquale quadrato semiaxis *b*A (§. 139), quadratum semiaxis *b*A una cum quadrato segmenti *db* erit æquale rectangulo ex D*d* in *d*B una cum quadrato ejusdem segmenti *db* (*Syn. Algeb.* §. 265.). Rectangulum autem ex D*d* in *d*B una cum quadrato segmenti *db* est æquale quadrato semiaxis D*b* (§. 94.). Ergo etiam quadratum semiaxis *b*A una cum quadrato segmenti *db* erit æquale quadrato semiaxis Fig. 12. T. XIV.

D*b* (*Syn. Alg.* §. 262.). Manifestum porro est, quadratum rectæ *d*A æquare quadratum semiaxis *b*A una cum quadrato segmenti *db* (*Lib. VI.* §. 37.); cum angulus *db*A trianguli *db*A sit rectus (§. 31.). Ergo quadratum rectæ *d*A erit itidem æquale quadrato semiaxis D*b* (*Syn. Alg.* §. 262.); ac proinde rectæ D*b*, *d*A erunt inter se æquales (*Lib. I.* §. 187.). Itaque recta linea &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XX.

Foci ellipseos æqualiter distant ab illius centro.

141. Puncta *d*, *a* sint foci ellipseos ABCD. Dico, eorum distantias *bd*, *ba* a centro *b* ipsius ellipsis esse æquales.

Demonstratio.

Ex ipsis focis *d*, *a* ducantur ad extremum punctum A minoris axis CA rectæ *d*A, *a*A. Igitur quoniam tam recta *d*A, quam recta *a*A adæquat Fig. 12. T. XIV. semiaxim majorem D*b* (§. 140.), ipsæ *d*A, *a*A erunt inter se æquales (*Syn. Alg.* §. 259.); ac proinde triangulum *d*A*a* erit isosceles (*Lib. V.* §. 25.). Recta autem A*b* ad perpendiculum insistit basi *da* (§. 31.). Ergo recta *da* divisa erit bifariam in puncto *b* (*Lib. V.* §. 78.), seu erit $bd = ba$. Foci itaque ellipseos &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Foci ellipseos æqualiter distant a suo vertice.

142. Nimirum distantia *d*D foci *d* a vertice D erit æqualis distantiæ *a*B foci *a* a vertice B. Quandoquidem cum sit $bd = ba$ (§. 141.), & $bD = bB$ (§. 28.), erit etiam $bD - bd = bB - ba$ (*Syn. Alg.* §. 266.), sive $dD = aB$.

THEOREMA XXI.

Semiordinata ad majorem axim ellipseos ducta ex ejus foco adæquat semiparametrum ipsius axis.

143. Recta AC sit parameter majoris axis AB ellipseos ADB, ex cujus foco *a* ducatur semiordinata *ab* ad ipsum axim AB. Dico, semiordinatam *ab* æquare dimidiam partem parametri AC.

Demonstratio.

Fig. 13. T. XIV. Quoniam rectangulum ex A*a* in *a*B est ad quadratum *ax* semiordinatæ *ab*, ut axis AB ad parametrum AC (§. 75.), rectangulum ex A*a* in *a*B erit ad

ad quadratum ax semiordinatæ ab, ut rectangulum ABNC figuræ ipsius axis AB ad quadratum $AedC$ ipsius parametri AC (*Lib. I. §.* 78.); cum rectangulum ABNC sit ad quadratum $AedC$, ut AB ad Ae, sive ut AB ad AC, nempe ut eorum bases (*Lib. IX. §.* 95.). Ergo *alternando*, quadratum ax semiordinatæ ab erit ad quadratum $AedC$ parametri AC, ut est rectangulum ex Aa in aB ad rectangulum ABNC (*Lib. I. §.* 125.). Rectangulum autem ex Aa in aB est in ratione *subquadrupla* ad rectangulum ABNC (§. 138.). Ergo etiam quadratum ax semiordinatæ ab erit in ratione *subquadrupla* ad quadratum $AedC$ parametri AC; ac proinde recta ab erit in ratione *subdupla* ad parametrum AC, nempe erit $2ab = AC$ (*Lib. IX §.* 173.). Itaque semiordinata &c. quod erat ostendendum.

L E M M A VI.

Si recta linea secta sit utcunque, duo rectangula contenta sub tota, & partibus simul sumta erunt æqualia quadrato totius.

144. Recta AB secta sit utcunque in puncto a. Dico, rectangulum ex AB in Aa simul cum rectangulo ex AB in aB æquare quadratum totius AB.

Demonstratio I.

Ponatur $AB = m$, & $Aa = n$, adeoque $aB = m - n$. Igitur quadratum totius AB erit $= mm$, rectangulum $Aa \times AB = mn$, & rectangulum $aB \times AB = mm - mn$. Quamobrem erit quoque $Aa \times AB + aB \times AB = mn + mm - mn$ (*Syn. Alg. §.* 265.). Est autem $mn + mm - mn = mm$. Ergo duo rectangula $Aa \times AB$, $aB \times AB$ simul sumta erunt æqualia quadrato totius AB. Fig. 11. T. XIII.

Demonstratio II.

Descripto circa rectam AB semicirculo AbB, erecta ponatur ex puncto a perpendicularis ab, junctisque punctis b, A recta bA, & punctis b, B recta bB, constitutum habebitur triangulum rectangulum BbA, in quo latus bA erit media proportionalis inter totam AB, & partem Aa, & latus bB media itidem proportionalis inter totam AB, & partem aB (*Lib. IX. §.* 74.). Igitur rectangulum ex AB in Aa erit æquale quadrato rectæ Ab, & rectangulum ex AB in aB quadrato rectæ bB (§. 111.). Duo autem quadrata rectarum Ab, bB æqualia sunt quadrato totius AB (*Lib. VI. §.* 37.). Ergo etiam duo rectangula $AB \times Aa$, $AB \times aB$ erunt eidem quadrato totius AB æqualia (*Syn. Alg. §.* 262.). Itaque si recta &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XXII.

In ellipsi distantia focorum est media proportionalis inter latus transversum, ejusque differentiam a latere recto.

145. Sint *a*, *m* foci ellipseos ADB, latus transversum recta AB, parameter BE, & differentia lateris transversi AB a recto BE sit recta EF. Dico, rectam *a.m* utroque foco terminatam, esse mediam proportionalem inter latus AB, & differentiam EF.

Fig. 13. T. X V.

Demonstratio.

Quoniam rectæ *a*G, *m*G sunt æquales (§.141.), seu recta *am* est dupla rectæ G*m*, quadratum rectæ *am* erit quadruplum quadrati rectæ G*m* (*Lib.IX.§.172.*). Rectangulum autem ex latere AB in parametrum BE est itidem quadruplum rectanguli ex A*m* in *m*B (§.138.). Ergo quadratum rectæ *am* una cum rectangulo rectæ AB in rectam BE erit itidem in ratione quadrupla ad quadratum rectæ G*m* una cum rectangulo rectæ A*m* in rectam *m*B (*Lib.I.§.144.*). Rectangulum autem ex A*m* in *m*B una cum quadrato rectæ G*m* est æquale quadrato rectæ GB (§.49.). Igitur quadratum rectæ *am* una cum rectangulo rectæ AB in BE erit similiter in ratione quadrupla ad quadratum rectæ GB (*Lib. I. §. 112.*); cumque ejusdem quadrati semiaxis, sive rectæ GB quadruplum quoque sit quadratum totius axis AB (*Lib. IX. §. 172.*), quadratum rectæ *am* una cum rectangulo rectæ AB in BE erit æquale quadrato totius rectæ AB (*Lib. I. §. 103.*). Constat porro quadratum rectæ AB esse æquale duobus rectangulis ex AB in BE, & ex AB in EF (§. 144.). Ergo quadratum rectæ *am* una cum rectangulo ex AB in BE erit æquale duobus rectangulis AB ⋈ BE, AB ⋈ EF (*Syn. Alg. §. 261.*). Quamobrem, demto utrique membro hujus æquationis communi rectangulo AB ⋈ BE, quadratum rectæ *am*, quod in primo membro relinquitur, æquabit rectangulum AB ⋈ EF, quod superest in secundo (*Syn. Alg. §. 266.*), & ideo recta *am* erit media proportionalis inter rectas AB, EF (*Lib.I.§.118.*). Itaque in ellipsi &c. quod erat &c.

THEOREMA XXIII.

Si ad punctum G, in quo ellipsis ABCD a recta EK lateraliter tangitur, ducatur ex illius foco a recta aG; tum ipsi aG agatur ex centro b recta parallela bF occurrens tangenti EK in F, recta bF erit æqualis semiaxi majori bD.

146. Ex altero foco *d* ad idem punctum G ducatur recta *d*G, ad punctum F recta *d*F, atque ad tangentem EK recta *d*K ipsis *b*F, *a*G parallela.

De-

Demonstratio.

Quoniam igitur tam angulus KG*d* (§. 136.), quam angulus GK*d* (*Lib. IV. §.* 14.) adæquat angulum EG*a*, duo illi anguli erunt inter se æquales (*Syn. Alg. §.* 259.), adeoque etiam latera K*d*, *d*G trianguli K*d*G erunt æqualia Fig. 12. (*Lib. V. §.* 65.), seu triangulum K*d*G erit isosceles. In triangulo autem G*da* T. XIV. habetur *de*. *e*G $=$ *db*. *ba* (*Lib. IX. §.* 55.), sicuti etiam KF. FG $=$ *de*. *e*G in triangulo GK*d*, & ideo KF. FG $=$ *db*. *ba* (*Lib. I. §.* 78.). Ergo, cum sit *db* $=$ *ba* (§. 141.), erit quoque KF $=$ FG (*Lib. I. §.* 45.); rectaque *d*F in triangulo K*d*G ad perpendiculum basi KG incumbet (*Lib. V. §.* 89.); & ideo uterque angulus KF*d*, GF*d* erit rectus. Hinc, ductis tangentibus verticalibus DH, BE, nec non ex puncto D ad punctum F recta DF, ex puncto *d* ad punctum H recta *d*H, ex puncto B ad punctum F recta BF, & ex puncto E ad punctum *d* recta E*d*, duo anguli oppositi HD*d*, HF*d* in quadrilatero HD*d*F erunt recti, sicuti etiam duo *d*FE, *d*BE in quadrilatero F*d*BE. Quamobrem circulus descriptus circa rectam lineam H*d* transibit per quatuor puncta H, D, *d*, F, & circulus descriptus circa rectam *d*E transibit itidem per quatuor puncta F, *d*, B, E (*Lib. VII. §.* 82.). Igitur duo anguli DH*d*, DF*d*, utpote in eadem circuli portione consistentes, erunt inter se æquales (§. 73.), quemadmodum eandem ob causam etiam anguli BFE, B*d*E. Ostensum est autem §. 136. angulos DH*d*, B*d*E esse æquales. Ergo duo quoque anguli DF*d*, BFE erunt inter se æquales (*Syn. Alg. §.* 259.); ac proinde, si utrique adjiciatur angulus *d*FB, angulus DFB æquabit angulum *d*FE (§. 266.). Demonstravimus autem, angulum *d*FE esse rectum. Igitur etiam angulus DFB erit rectus; & ideo si centro *b*, intervallo *b*D describatur circulus DMB, is transibit per punctum F (*Lib. VII. §.* 78.); rectaque propterea *b*F æquabit rectam, seu semiaxim majorem *b*D (§. 10.). Si ergo ad punctum &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XXIV.

Si ex focis ad quovis punctum curvæ ellipticæ inclinentur duæ rectæ lineæ, earum summa æquabit majorem axim ipsius ellipsis.

147. Ex focis *d*, *a* ellipseos ABCD ad quovis punctum G curvæ ellipticæ ducantur rectæ *a*G, *a*G. Dico, rectas *d*G, *a*G simul sumtas æquare axim majorem DB.

Demonstratio.

Etenim, ductis rectis *b*F, *d*K parallelis inclinatæ *a*G, quæ occurrant tangenti laterali KE, & simul junctis punctis *d*, F recta *d*F, cum in triangulo *d*G*a* sit G*a*. *eb* $=$ *da*. *eb* (*Lib. IX. §.* 59.), erit G*a* $=$ 2*be*, sicuti est *da* $=$ 2*db* (§. 141.).

Eadem

Eadem ratione quoniam in triangulo KdG habetur $Kd.\ Fe = KG.\ FG$, quemadmodum est $KG = 2FG$ (*ex Demonst. §. 146.*), ita erit $Kd = 2Fe$. Est autem $dG = dK$ (*ex Demonst. §. 146.*). Ergo erit etiam $dG = 2Fe$; ac proinde $aG + dG = 2be + 2Fe$, sive $aG + dG = 2bF$. Constat autem, esse $bF = bD$ (§. 146.); & ideo $2bF = DB$. Igitur erit $aG + dG = DB$ (*Syn. Alg. §. 291.*). Si ergo ex focis &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM V.

Inclinatae ex focis ad singula puncta curvae ellipticae sunt omnes inter se aequales.

148. Ut si ex focis d, a ducantur ad puncta N, A, P curvae ellipticae DAB rectae dN, aN * dA, aA * dP, aP, erit $dN + aN = dA + Aa = dP + aP$. Perspicuum siquidem est, esse tam $dN + aN$, quam $dA + aA$, sicuti etiam $dP + aP = DB$ (§. 147.).

THEOREMA XXV.

Sectio cylindri neque circulo baseos parallela, neque subcontraria, cujus axis cum diametro baseos cylindri extra basim ipsam concurrat, est ellipsis conicae ellipsi omnino similis.

149. Esto $FabK$ sectio cylindri ABDC circulo baseos BD minime parallela, neque subcontrarie posita, cujus axis FG, nempe communis sectio plani ABCD per axim, & plani $FabK$ sectionem ipsam determinantis, concurrat extra cylindrum cum diametro BD baseos ejusdem in puncto E. Dico, sectionem $FabK$ esse ellipsim ejusdem omnino indolis cum ea, quae ex cono deducitur.

Fig. 14. T. XIV.

Demonstratio.

Ut sectio $FabK$ sit ellipsis omnino similis ellipsi conicae, duo ostendenda sunt, videlicet *primo*: quadrata semiordinatarum ad axim in sectione ipsa $FabK$ esse directe inter se, ut rectangula, quae sub correspondentibus portionibus ipsius axis continentur. *Secundo*: illa quadrata non esse hisce rectangulis aequalia.

Ad primum ergo quod attinet, in axe FG sumantur duo quaecunque puncta d, e, per quae agantur rectae LM, HK in plano per cylindri axim traducto, quae sint parallelae tum inter se, tum diametro DB circuli baseos BmD. Ex iisdem itidem punctis d, e ducantur rectae da, eb parallelae rectae mn ad rectos angulos diametrum BD circuli baseos BmD secanti; ac proinde etiam inter se parallelae (*Lib. IV. §. 17.*), atque rectis LM, HK perpendiculariter insistentes ob eandem scilicet inclinationem ad planum ABDC tum plani, in quo sint rectae ad, mn, tum plani, in quo sint rectae be, mn.

Si

Si ergo cylindrus ABDC sectus concipiatur duobus planis, in quorum altero rectæ LM, da, in altero rectæ HK, be positæ concipiantur, sectiones LaM, HbK erunt circuli (*Lib. IX. §. 81.*) quorum diametris LM, HK rectæ ad, be erunt perpendiculares. Igitur quadratum rectæ ad erit æquale rectangulo ex Ld in dM, & quadratum rectæ be rectangulo ex He in eK (*Lib. IX. §. 113.*); atque adeo quadratum rectæ ad erit ad rectangulum $Ld \times dM$, ut quadratum rectæ be ad rectangulum $He \times eK$; & *alternando*, quadratum rectæ ad erit ad quadratum rectæ be, ut rectangulum $Ld \times dM$ ad rectangulum $He \times eK$ (*Lib. I. §. 125.*). Rectangulum autem $Ld \times dM$ est ad rectangulum $He \times eK$ in ratione composita ex ratione rectæ Ld ad rectam He, & ex ratione rectæ dM ad rectam eK, basium scilicet, & altitudinum (*Lib. IX. §. 105.*); adeoque in ratione composita ex ratione rectæ Fd ad rectam Fe, & ex ratione rectæ dG ad rectam eG; cum sit $Fd.\, Fe = Ld.\, He$, & $dG.\, eG = dM.\, eK$ (*Lib. IX. §. 59.*), propter parallelismum scilicet rectarum Ld, He in triangulo HFe, & rectarum dM, eK in triangulo dGM. Ergo etiam quadratum rectæ ad erit ad quadratum rectæ be in ratione composita ex ratione rectæ Fd ad rectam Fe, & ex ratione rectæ dG ad rectam eG. Manifestum porro est, rectangulum $Fd \times dG$ esse ad rectangulum $Fe \times eG$ in ratione composita ex ratione rectæ Fd ad rectam Fe, & ex ratione rectæ dG ad rectam eG, videlicet basium, & altitudinum (§. 105.). Igitur, ut rectangulum $Fd \times dG$ ad rectangulum $Fe \times eG$, ita est quadratum rectæ ad ad quadratum rectæ be (*Lib. I. §. 76.*). Quadrata itaque semiordinatarum ad axim in sectione cylindrica $FabG$ sunt directe inter se, ut rectangula sub correspondentibus portionibus ipsius axis comprehensa.

Quod vero spectat ad alterum, perspicuum id fiet, si ostendatur, sectionem $FabG$ non esse circulum. Sumto igitur in axe FG puncto medio x, & per illud ducta recta NS in plano parallelogrammi ABDC, nempe sectionis cylindri per axim, parallela lateribus AB, CD, agatur in eodem plano per idem punctum x recta PT parallela lateribus AC, BD. Certum est, rectam PT divisam esse bifariam in x; cum sit $Px = AN$, & $xT = NC$ (*Lib. VI. §. 23.*). Certum quoque est, sectionem peractam plano, in quo sint recta PT, & recta xz ducta in plano sectionis $FabG$, parallela rectæ mn, esse circulum. Igitur rectæ Px, xz, utpote radii ejusdem circuli, erunt æquales (*Lib. VII. §. 10.*). Recta autem Fx est major recta Px (*Lib. V. §. 53.*); cum sit opposita majori angulo FPx in triangulo FPx; & eadem ratione etiam recta xG excedit rectam xT ipsi Px æqualem. Ergo punctum x sumtum in medio diametri FG figuræ curvilineæ $FabG$ non est hujusmodi, ut omnes rectæ, quæ ex illo cadunt in curvam $FabG$, sint inter se æquales. Igitur sectio $FabG$ non est circulus; atque adeo &c. Itaque sectio cylindri &c. quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

150. Quæcunque ergo de conica ellipsi hactenus demonstravimus, de ellipsi cylindrica itidem sunt intelligenda.

C A-

CAPUT TERTIUM.

De Parabola.

DEFINITIO I.

Fig. 3. T. XIII. 151. P*Arabola dicitur illa coni sectio, quæ fit plano parallelo lateri ipsius coni, seu cujus axis a coni latere æqualiter ubique distat.* Sic sectio DEF coni recti BAC *parabola* nuncupatur. Planum quippe GD, quo illa perficitur, æqualiter ubique distat a latere AC coni, ejusque propterea axis EL est eidem lateri parallelus.

COROLLARIUM.

152. Hinc *curva parabolica in se non redit, quemadmodum elliptica;* & ideo *unus tantum est parabolæ axis, & unus vertex.*

THEOREMA I.

In parabola quadrata semiordinatarum ad axim sunt directe inter se, ut correspondentes abscissæ.

153. In cono recto BAC spectetur sectio parabolica HDK, cujus axis
Fig. 1. T.XV. sit recta DE, & semiordinatæ ad illum rectæ *ab*, *ze*. Dico, quadratum semiordinatæ *ab* esse ad quadratum semiordinatæ *ze*, ut est abscissa D*b* ad abscissam D*e*.

Demonstratio.

Quoniam tam recta *ab*, quam recta *ze* est parallela rectæ HE in plano circuli baseos BHC existenti (§. 17.), si per puncta *b*, *e* ducantur rectæ FG, MN, quæ sint in plano trianguli per axim, & diametro, seu basi BC ipsius trianguli sint parallelæ, planum, in quo sint rectæ *ab*, FG, erit parallelum circulo baseos BHC, sicuti etiam planum, in quo sint rectæ *ze*, MN. Igitur sectiones F*a*G, M*z*N erunt circuli (*Lib. XI.* §. 91.), quorum diametri erunt rectæ FG, MN, illisque ad perpendiculum insistent rectæ *ab*, *ze*, sicuti recta HE est diametro BC perpendicularis; cum nempe eadem ubique sit inclinatio plani sectionis HDK ad planum BAC trianguli per axim. Igitur quadratum semiordinatæ *ab* æquabit rectangulum ex F*b* in *b*G, & quadratum semiordinatæ *ze* rectangulum ex M*e* in *e*N (*Lib. IX.* §. 113.); atque propterea quadratum semiordinatæ *ab* erit ad rectangulum ex F*b* in *b*G, ut est quadratum semiordinatæ *ze* ad rectangulum ex M*e* in *e*N, & *alternando*, quadratum semiordinatæ *ab* erit ad quadratum semi-
or-

ordinatæ *ze*, ut rectangulum ex F*b* in *b*G ad rectangulum ex M*e* in *e*N (*Lib* I. §. 125.). Rectangulum autem ex F*b* in *b*G est ad rectangulum ex M*e* in *e*N, ut est recta F*b* ad rectam M*e*, nempe ut eorum bases (*Lib.* IX. §. 95.); cum rectæ *b*G, *e*N, quæ haberi possunt veluti eorum altitudines, sint inter se æquales (*Lib.* VI. §. 20.), utpote latera opposita parallelogrammi G*be*N. Ergo etiam quadratum semiordinatæ *ab* erit ad quadratum semiordinatæ *ze*, ut est recta F*b* ad rectam M*e* (*Lib.* I. §. 77.). Perspicuum porro est, rectam D*b* in triangulo MD*e* esse ad rectam D*e*, ut est recta F*b* ad rectam M*e* (*Lib.* IX §. 59.), propterea quod rectæ F*b*, M*e* sint in ipso triangulo inter se parallelæ. Igitur quadratum semiordinatæ *ab* erit ad quadratum semiordinatæ *ze*, ut est abscissa D*b* ad abscissam D*e* (*Lib.* I. §. 78.). Itaque in parabola &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

154. Est igitur parabola *figura plana curva linea in se minime redeunte comprehensa, in qua semiordinatarum ad axim quadrata sunt directe inter se, ut correspondentes abscissæ*.

COROLLARIUM II.

Semiordinatæ ad axim in parabola sunt in ratione subduplicata abscissarum; abscissæ vero in ratione semiordinatarum duplicata.

155. Videlicet in parabola BAC semiordinata *ab* est ad semiordinatam *de* in ratione *subduplicata* abscissæ A*a* ad abscissam A*d*. Abscissa vero A*a* est ad abscissam A*d* in ratione *duplicata* semiordinatæ *ab* ad semiordinatam *de*. Cum enim semiordinatæ *ab*, *de* sint in ratione *subduplicata* suorum quadratorum (*Lib.* IX. §. 173.), & ratio abscissarum A*a*, A*d* non sit diversa a ratione horum quadratorum (§. 153.), semiordinatæ *ab*, *de* erunt quoque in ratione *subduplicata* abscissæ A*a* ad abscissam A*d*. Vicissim vero abscissæ A*a*, A*d* erunt in ratione *duplicata* semiordinatarum *ab*, *de*; cum sint inter se, ut quadrata ipsarum semiordinatarum *ab*, *de*. Fig. 2. T. XV.

COROLLARIUM III.

In parabola semiordinatæ ad axim eo sunt majores, quo magis a vertice recedunt.

156. Sic in parabola BAC semiordinata *de* major est semiordinata *ab*, quæ est proximior vertici A. Etenim, cum quadratum semiordinatæ *de* sit ad quadratum semiordinatæ *ab*, ut abscissa A*d* ad abscissam A*a*, sicuti abscissa A*d* excedit abscissam A*a*, ita quadratum semiordinatæ *de* superabit quadratum semiordinatæ *ab* (*Lib.* I. §. 128.); ac proinde recta quoque *de* major erit recta *ab*.

Co-

Corollarium IV.

Etiam ordinatæ ad axim in parabola in recessu a vertice continuo majores fiunt.

157. Ordinatæ namque ad axim sunt directe inter, ut semiordinatæ (*Lib. I.* §. 127.).

Corollarium V.

158. Postremo perspicuum est, *in parabola quadrata semiordinatarum ad axim ea proportione continuo crescere in recessu a vertice, qua augentur abscissæ;* atque hinc parabolam independenter quoque a cono definiri itidem posse, *figuram planam curva linea in se minime redeunte terminatam, in qua semiordinatarum ad axim quadrata ea proportione in recessu a vertice augentur, qua crescunt correspondentes abscissæ.*

Theorema II.

Si ex vertice axis parabolæ agatur recta ordinatis ad ipsum axim parallela, quæ illius sit longitudinis, ut quadratum unius semiordinatæ adæquet rectangulum contentum sub illa, & sub correspondente abscissa, quadratum alterius cujuslibet semiordinatæ ad axim æquabit rectangulum, quod sub illa eadem recta, & sub correspondente abscissa itidem comprehenditur.

159. Ex vertice A axis AD parabolæ BAC ducatur recta AE parallela
Fig. 2. ordinatis xb, ye, sitque AE tantæ longitudinis, ut quadratum unius semi-
T. XV. ordinatæ ab adæquet rectangulum E$m a$A contentum sub ipsa AE, & sub abscissa Aa ipsi semiordinatæ correspondente. Dico, quadratum quoque alterius cujuslibet semiordinatæ de æquare rectangulum E$n d$A, quod sub ipsa eadem recta AE, & sub abscissa Ad comprehenditur.

Demonstratio.

Quadratum semiordinatæ ab est ad quadratum semiordinatæ de, ut abscissa Aa ad abscissam Ad (§.153.). Rectangulum autem EmaA est ad rectangulum EndA æqualis basis, ut altitudo Aa ad altitudinem Ad (*Lib.* IX. §.100.). Ergo quadratum semiordinatæ ab est ad quadratum semiordinatæ de, ut rectangulum EmaA ad rectangulum EndA (*Lib.* I. §. 78.). Posuimus autem, quadratum semiordinatæ ab æquare rectangulum EmaA. Ergo etiam quadratum semiordinatæ de æquabit rectangulum EndA (§. 128.). Itaque si ex vertice &c. quod erat &c.

D E-

DEFINITIO II.

160. Recta AE vocatur *parameter*, vel *latus rectum* axis AD parabolæ BAC. Ipse vero axis AD *latus* ejusdem parabolæ *transversum* nuncupatur. Quamobrem universaliter loquendo, *parameter* axis parabolæ est *recta linea ducta ex vertice axis ordinatis ad ipsum axim parallela, cujus longitudo tanta est, ut quadratum cujuslibet semiordinatæ ad axim sit æquale rectangulo, quod sub illa, & sub correspondentibus respective abscissis comprehenditur.*

COROLLARIUM I.

161. *Parameter axis parabolæ perpendiculariter ipsi axi insistit, & parabolam tangit.* Res manifesta fiet, si quæ diximus de *parametro* axis ellipseos, memoria repetantur.

COROLLARIUM II.

In parabola quadratum cujuslibet semiordinatæ ad axim est æquale rectangulo, quod continetur sub parametro, & sub corrspondente abscissa.

162. Demonstravimus enim, in parabola BAC quadratum semiordinatæ gb esse æquale rectangulo EmaD contento sub recta AE, quæ est parameter axis AD, & sub abscissa Aa.

COROLLARIUM III.

163. Est igitur parabola, ipsam quoque independenter a cono spectando, *figura plana curva linea in se minime redeunte comprehensa, in qua semiordinatarum ad axim quadrata sunt æqualia rectangulis contentis sub parametro, & sub correspondentibus abscissis.*

SCHOLION.

164. Ob hanc æqualitatem quadrati cujuslibet semiordinatæ ad axim cum rectangulo, quod sub *parametro* ipsius axis, & sub correspondente abscissa comprehenditur, conicæ hujusmodi sectioni nomen *parabolæ*, quod *æqualitatem* refert, inditum est.

Co-

Corollarium IV.

Parameter axis parabolæ est tertia proportionalis abscissæ, & semiordinatæ ad axim.

165. Videlicet in parabola BAC, cujus axis sit recta AD, parameter AE; & semiordinatæ ad axim rectæ *ab*, *de*, habetur ∺ A*a*. *ab*. AE, sicuti etiam ∺ A*d*. *de*. AE. Id enim ex eo necessario sequitur, quod quadratum rectæ *ab* sit æquale rectangulo ex A*a* in AE, & quadratum rectæ *de* rectangulo ex A*d* in AE (*Lib*. IX. §. 118.).

Definitio III.

Fig. 2. T. XV. 166. Si parameter axis parabolæ fuerit æqualis axi ejusdem, parabola dicitur *æquilatera*. Sic æquilatera dicetur parabola BAC, si parameter AE fuerit æqualis axi AD.

Definitio IV.

167. *Directrix, seu regulatrix parabolæ est recta linea ducta ex puncto extremo parametri axi parallela. Subdirectrix vero, sive subregulatrix est recta* Fig. 2. T.XV. *axi itidem parallela, parametrum bifariam dividens.* Sic recta EF ducta ex puncto extremo E parametri AE parallela axi AD est *directrix* parabolæ BAC; ejusdem vero *subdirectrix* recta GH, axi AD itidem parallela, ipsumque parametrum bifariam dividens.

Corollarium.

168. *Subdirectrix parabolæ est directrici parallela*. Utraque enim est parallela axi.

Theorema III.

In parabola BAC quadratum cujuslibet semiordinatæ de *ad axim AD est duplum quadrilateri AG*sd, *quod semiparametro AG, abscissa A*d, *subdirectrice G*s, *& recta* ds *comprehenditur.*

169. Recta *ds* producatur in directum usque ad regulatricem EF.

Demonstratio.

Quoniam rectæ AE, *ds* sunt parallelæ (§.160.), sicuti etiam rectæ AD, Fig. 2. T.XV. GH (§. 168.), & angulus EAD rectus (§. 161.), quadrilaterum G*sd*A erit parallelogrammum rectangulum. Quamobrem, cum recta AE sit dupla rectæ

rectæ AG (§.167.), rectangulum quoque AE*nd* erit duplum rectanguli G*sd*A (*Lib.* IX. §. 95.), quod eadem sit utriusque altitudo A*d*. Quadratum autem semiordinatæ *de* adæquat rectangulum AE*nd* (§. 162.). Ergo quadratum semiordinatæ *de* duplum itidem erit rectanguli G*sd*A (*Lib.* I. §. 102.); ac proinde in parabola &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA IV.

Si in parabola BAC, cujus axis sit recta AD, parameter AG, subdirectrix HK, & semiordinata Fa, fiat, ut recta ba *ad semiordinatam aF, ita ipsa semiordinata aF ad rectam aE compositam ex abscissa Aa, & ex segmento EA axi in directum adjecto, recta EF ducta ex puncto E ad extremum* F *ipsius semiordinatæ, erit tangens parabolam in puncto F.*

170. Ex quovis puncto *x* rectæ EF agatur ad axim AD recta *xd* parallela tangenti AG, atque subdirectrici HK occurrens in puncto N, & puncta E, *b* jungantur recta E*b*:

Demonstratio.

Eodem plane ratiocinio hæc propositio ostenditur, quo §. 94. idipsum de tangente ellipsim demonstravimus. Quandoquidem, cum ex hypothesi jam sit ∺ *ba* . *a*F . *a*E, quadratum rectæ *a*F erit æquale rectangulo ex *ba* in *a*E, scilicet M*a* (*Lib.* IX. §. 111.); unde ducta diagonali E*b*, sicuti rectangulum M*a* est duplum trianguli *b*E*a* (*Lib.* VI. §. 21.), ita ejusdem trianguli duplum erit quadratum rectæ *a*F (*Lib.* I. §. 102.). Est autem quadratum ejusdem *a*F duplum rectanguli H*ba*A (§. 169.). Igitur rectangulum H*ba*A adæquat triangulum *b*E*a* (*Lib.* I. §. 113.), demtoque utrique propterea trapezio *by*A*a*, triangulum H*by* erit æquale triangulo *y*AE (*Syn. Alg.* §. 266.). Triangulum autem H*by* est majus trapezio HN*zy*. Ergo etiam triangulum *y*AE majus erit eodem trapezio HN*zy* (§. 264.); quapropter, si utrique adjiciatur trapezium *yzd*A, triangulum *z*E*d* majus erit trapezio HN*d*A (§. 268.). Constat autem, esse ∺ *zd*. *dx*. E*d* (§. 93.). Igitur quadratum rectæ *dx* erit æquale rectangulo ex *zd* in E*d* (*Lib.* IX. §. 111.); cumque hujusmodi rectangulum sit duplum trianguli *z*E*d*, ejusdem quoque trianguli duplum erit quadratum rectæ *dx*. Quadratum autem semiordinatæ *de* est duplum rectanguli HN*d*A (§. 162.). Ergo quadratum semiordinatæ *de* erit ad rectangulum HN*e*A, ut est quadratum rectæ *dx* ad triangulum *z*E*d*. Demonstravimus autem, rectangulum HN*d*A deficere a triangulo *z*E*d*. Igitur etiam quadratum rectæ *de* minus erit quadrato rectæ *dx* (*Lib.* I. §. 128.); ac proinde recta quoque *de* erit minor recta *dx*. Igitur punctum *x* cadit extra curvam parabolicam BAC, eodemque ratiocinio demonstrabitur, aliud quodcunque punctum diversum a puncto F extra ipsam curvam parabolicam reperiri. Recta ergo EF tangit parabolam BAC in puncto F; & ideo si axis parabolæ &c. quod erat &c. Fig. 3. T. XV.

Corollarium I.

Recta tangens parabolam, in uno dumtaxat puncto ipsam tangit.

171. Ostensum siquidem est, omnia puncta rectæ EF diversa a puncto F cadere extra curvam parabolicam BAC.

Corollarium II.

172. *Si in axe AD sumatur segmentum* am *æquale rectæ* ab, *& ducatur ad punctum contactus F recta* mF, *hac erit perpendicularis tangenti EF.* Quippe, cum sit ∺ *ba*. *a*F. E*a*, erit quoque ∺ *ma*. *a*F. *a*E; & ideo angulus *m*FE erit rectus; cum rectangulum futurum sit triangulum EF*m* (*Lib. IX. §. 74.*).

Definitio V.

173. In parabola, quemadmodum in ellipsi, recta *m*F dicitur *normalis* tangenti EF, *subnormalis* recta *am*, *subtangens* vero recta E*a*, quæ inter semiordinatam *a*F, & punctum concursus E tangentis EF cum axe AD in directum ultra verticem producto intercipitur.

Corollarium III.

In parabola subnormalis adæquat semiparametrum.

174. Nimirum *subnormalis m a* erit æqualis semiparametro HA. Etenim in rectangulo H*ba*A recta *ba* adæquat rectam HA (*Lib. VI. §. 20.*). Recta autem *ma* posita est æqualis rectæ *ba*. Ergo recta *m a* semiparametrum quoque HA æquabit (*Syn. Alg. §. 268.*).

Corollarium IV.

Recta subtangens in parabola est dupla abscissæ, quæ respondet semiordinatæ ad axim ductæ ex puncto contactus.

175. Videlicet in parabola BAC, quæ tangatur a recta EF in puncto F, ducta ex puncto F semiordinata F*a* ad axim AD, subtangens E*a* est dupla abscissæ A*a* Cum enim, ut supra ostensum est, quadratum semiordinatæ *a*F adæquet rectangulum M*ba*E, sicuti quadratum semiordinatæ *a* F est duplum rectanguli H*ba*A (§. 169.), ita ejusdem rectanguli H*ba*A duplum erit rectangulum M*ba*E (*Lib. I. §. 102.*). Duo autem rectangula M*ba*E, H*ba*A habent eandem basim *ba*; suntque propterea eorum altitudines E*a*, A*a* ut ipsa rectangula (*Lib. IX. §. 104.*). Ergo erit E*a* = 2A*a*.

Co-

COROLLARIUM V.

176. Hinc *segmentum EA subtangentis Ea, quod extra parabolam reperitur, adæquat abscissam Aa.* Non enim potest esse $Ea = 2 Aa$, nisi etiam sit $EA = Aa$.

COROLLARIUM VI.

Recta tangens parabolam in vertice axis inter tangentem lateralem, & subtangentem comprehensa, est pars dimidia semiord.natæ ad axim ductæ ex puncto contactus.

177. Nimirum, iisdem positis, recta An est pars dimidia semiordinatæ aF. Quippe, cum, stante hypothesi, sit $aF. An = Ea. EA$ (§. 59.), erit $aF = 2An$, quemadmodum est $Ea = 2EA$ (§. 175.).

COROLLARIUM VII.

Recta abscindens in axe directe ultra verticem producto segmentum æquale abscissæ, tangit parabolam in extremo puncto semiordinatæ, quæ illi abscissæ respondet.

178. Sic recta EF erit tangens parabolam BAC in puncto F, si segmentum EA axis AD directe ultra verticem A producti, fuerit æquale abscissæ Aa, quæ semiordinatæ aF ductæ ad axim ex puncto F correspondet. Etenim producta in directum semiordinata Fa usque ad subdirectricem HK, constitutoque rectangulo $MbaE$, rectangulum $MbaE$ erit duplum rectanguli $HbaA$ ejusdem basis ba (*Lib.* IX. §. 100.). Ejusdem autem rectanguli $HbaA$ duplum est etiam quadratum semiordinatæ aF (§. 169.). Ergo quadratum semiordinatæ aF adæquat rectangulum $MbaE$ (*Lib.* I. §. 103.); ac proinde habetur $\div ba. aF. Ea$ (*Lib.* IX. 118.). Igitur recta EF tangit parabolam BAC in puncto F (§. 170.).

THEOREMA V.

In parabola recta quævis linea axi parallela bifariam dividit omnes rectas parallelas tangenti ductæ per illius extremum.

179. In parabola BAC ducatur recta quævis aH parallela illius axi AK; atque ex puncto a agatur tangens aF, quæ concurrat in puncto F cum axe AK directe ultra verticem A producto. Dico, rectam aH dividere bifariam omnes rectas parallelas tangenti aF.

Demonstratio.

I.

Fig. 4. T. XV. Spectetur primo recta De, quæ directe producta concurrat ultra verticem cum axe AK in puncto G. Tum per puncta D, e, sicuti etiam ex puncto contactus a, ducantur semiordinatæ em, an, DX ad axim, parallelæ idcirco tangenti AE, quæ concurrat cum ipsa aH in puncto E, rectaque me directe producatur in d. Itaque cum rectæ EA, dm, an, rX sint parallelæ, sicuti etiam rectæ EH, AK, & anguli EAK, dmK, anK sint recti (§. 24. & §. 14. lib. IV.), quadrilatera EdmA, danm, arXn, ErXA erunt parallelogramma, & quidem rectangula; cumque triangula aFn, DGX, utpote sibi mutuo æquiangula, sint similia (*Lib.* IX. §. 66.), triangulum aFn erit ad triangulum DGX, ut quadratum lateris an ad quadratum lateris homologi DX (§. 180.) Ut autem quadratum rectæ an ad quadratum rectæ DX, ita est recta An ad rectam AX (§. 153.), & ut recta An ad rectam AX, ita est rectangulum EanA ad rectangulum ErXA (*Lib.* IX. §. 100.). Ergo triangulum aFn erit ad triangulum DGX, ut rectangulum EanA ad rectangulum ErXA (*Lib.* I. §. 78.). Constat autem, triangulum aFn æquare rectangulum EanA (*Lib.* IX. §. 97.); cum recta nF sit dupla rectæ nA (§. 97.), eademque sit utriusque altitudo an. Ergo triangulum quoque DGX æquabit rectangulum ErXA (*Lib.* I. §. 128.). Eodem ratiocinio ostendam, triangulum eGm æquare rectangulum EdmA. Igitur, si triangulo DGX auferatur triangulum eGm, & rectangulo ErXA rectangulum EdmA, residuum trapezium DemX æquabit residuum rectangulum mdrX (*Syn. Alg.* §. 266.). Quamobrem, si utrique itidem dematur commune spatium mexrX, residuum triangulum xed erit æquale residuo triangulo xrD (§. 266.). Duo autem ista triangula sunt similia (*Lib.* IX. §. 66.); cum æquales sint inter se tum anguli dxe, Dxr (*Lib.* III. §. 51.), tum anguli xde, xrD, tum anguli dex, xDr (*Lib.* IV. §. 15.). Ergo latera ipsorum homologa xe, xD erunt æqualia (§. 100.). Itaque recta De bifariam dividitur in puncto x a recta aH.

II.

Sit modo recta VA parallela tangenti aF, eaque occurrat vertici A ipsius parabolæ, & ex puncto V agatur ad axim semiordinata VG. Perspicuum est, triangulum VAG esse simile triangulo aFn (*Lib* IX. §. 66.), utpote illi æquiangulum. Igitur triangulum aFn erit ad triangulum VAG, ut quadratum lateris an ad quadratum lateris VG (§. 180.), sive ut abscisa An ad abscissam AG (§. 153.); ac proinde ut rectangulum EanA ad rectangulum EsGA (*Lib.* IX §. 100.). Demonstravimus autem, triangulum aFn æquare rectangulum EanA. Ergo etiam triangulum VAG æquabit rectangulum EsGA (*Lib.* I. §. 128.); quocirca sublato communi trapezio syAG, residuum triangulum Vys erit æquale residuo triangulo EyA (*Syn. Alg* §. 266.). Hujusmodi autem triangula sunt similia, quemadmodum ostensum est

num.

num. praecedenti de triangulis Dxr, *dxe*. Ergo homologa ipsorum latera Vy, yA sunt aequalia (*Syn. Alg.* §. 110.); & ideo &c.

III.

Parallela demum tangenti *a*F sit recta BM, quae ita se habeat in parabola, ut secet ipsius axim AK in puncto *n*, & occurrat curvae parabolicae in puncto M. Ducta igitur semiordinata BK ad axim, atque ex puncto M ducta ordinata M*e*, per punctum *e* agatur recta DG eidem tangenti *a*F parallela, quae conveniat cum axe ultra verticem in puncto G. Quoniam ergo triangula B*n*K, *a*F*n* sunt similia (*Lib.* IX. §. 66.), triangulum B*n*K erit ad triangulum *a*F*n*, ut quadratum lateris BK ad quadratum lateris *an* (*Lib.* IX. §. 180.), seu ut abscissa AK ad abscissam A*n* (§. 100.). (§. 153.), adeoque ut rectangulum EHKA ad rectangulum E*an*A (*Lib.* IX. Triangulum autem *a*F*n* est aequale rectangulo E*an*A, ut *num.* I. demonstravimus. Ergo triangulum quoque B*n*K erit aequale rectangulo EHKA (*Lib.* I. §. 128.). Rursus quoniam rectae *em*, *m*M sunt aequales (§. 17.), sicuti etiam anguli *em*G, *nm*M (*Lib.* III. §. 51.), nec non anguli G*em*, *n*M*m* (*Lib.* IV. §. 15.), duo triangula *e*G*m*, *nm*M erunt aequalia (*Lib.* V. §. 94.). Ostensum est autem *num.* I. triangulum *e*G*m* aequare rectangulum E*dm*A. Ergo triangulum quoque *nm*M erit eidem rectangulo E*dm*A aequale (*Syn. Alg.* §. 262.). Quamobrem, si rectangulo EHKA dematur rectangulum E*dm*A, & residuo rectangulo H*dm*K adjiciatur triangulum *nm*M, triangulum B*n*K aequabit rectangulum H*dm*K una cum triangulo *nm*M; & ideo, sublato utrique communi trapezio H*zn*K, residuum triangulum B*z*H aequabit residuum triangulum *dz*M (§. 266.). Haec autem duo triangula sunt similia (*Lib.* IX. §. 66.); cum sint aequiangula, ut consideranti perspicuum fiet. Igitur latera ipsorum homologa B*z*, *z*M sunt inter se aequalia (§. 110.); ac proinde recta BM bifariam dividitur a recta *a*H. Recta igitur *a*H bifariam dividit omnes rectas parallelas tangenti *a*F; ac propterea in parabola &c. quod erat &c.

COROLLARIUM I.

In parabola recta quaevis linea axi parallela est illius diameter secundaria.

180. Cum enim bifariam dividat omnes rectas tangenti parallelas, habet quidquid requiritur, ut sit diameter ipsius parabolae (§. 11.).

COROLLARIUM II.

In parabola omnes diametri secundariae sunt axi parallelae.

181. Ut si in parabola BAC, cujus axis sit recta AK, ponatur recta PQ diameter, erit ipsa PQ parallela axi AK. Ducta enim ordinata NC Fig. 4. T.XV.

ad ipſam diametrum PQ, biſariam ab illa ſecta erit in puncto S (§. 17.). Si autem recta PQ non eſt parallela axi AK, agatur ex eodem puncto P recta PR axi AK parallela. Hæc igitur biſariam dividet rectam NC (§. 23.), utpote parallelam tangenti ductæ per punctum P. Dividet autem recta PR ipſam NC in alio puncto, nempe T, ab illo diverſo, in quo ipſa eadem recta NC ſecatur a recta PQ, ut eſt manifeſtum. Id porro omnino repugnat. Ergo, ſi recta PQ eſt diameter parabolæ BAC, ipſius axi AK neceſſario eſt parallela.

COROLLARIUM III.

In parabola quævis recta axi parallela dividit biſariam ſegmentum parabolicum determinatum a recta ordinatim illi applicata.

Fig. 4. T. XV. 182. Sic recta *a*H in parabola BAC parallela axi AK biſariam dividit ſegmentum parabolicum B*a*MB determinatum a recta BM ipſi *a*H ordinatim applicata. Etenim, ſi tot ordinentur rectæ, quot ſunt puncta in abſciſſa *az*, cum ſingulæ a recta *a*H biſariam dividantur, elementa ſpatii parabolici B*az* erunt numero, & magnitudine æqualia elementis ſpatii *za*M. Ergo hujuſmodi ſpatia erunt æqualia (*Lib.* IX. §. 58.).

THEOREMA VI.

In parabola quadrata ſemiordinatarum ad quamlibet ſecundariam diametrum ſunt directe inter ſe, ut correſpondentes abſciſſæ.

Fig. 4. T. XV. 183. Recta *a*H ſit una ex diametris ſecundariis parabolæ BAC, ad quam ordinentur rectæ D*e*, VA, BM. Dico, quadratum ſemiordinatæ *xe* eſſe ad quadratum ſemiordinatæ *y*A, ut abſciſſa *ax* ad abſciſſam *ay*. Quadratum quoque ſemiordinatæ *y*A eſſe ad quadratum ſemiordinatæ *z*M, ut eſt abſciſſa *ay* ad abſciſſam *az*.

Demonſtratio.

Quoniam oppoſita latera E*a*, A*n* rectanguli E*an*A ſunt æqualia (*Lib. VI.* §. 20.), ſicuti etiam rectæ FA, A*n* (§. 76.), duæ quoque E*a*, FA erunt æquales (*Syn. Alg* §. 259). Æquales ſunt autem inter ſe tum anguli LE*a*, LAF, tum anguli L*a*E, LFA (*Lib. IV.* §. 15.) propter paralleliſmum rectarum E*a*, FA. Ergo duo triangula E*a*L, LAF erunt inter ſe æqualia (*Lib.* V. §. 94.). Hinc, ſi utrique addatur trapezium *ay*AL, triangulum E*y*A erit æquale quadrilatero *ay*AF (*Syn Alg.* §. 265.). Similiter, ſi illis iiſdem triangulis adjiciatur figura *ar*XAL*a*, trapezium F*ar*X æquabit rectangulum AE*r*X. Demonſtravimus autem §. 179. *num.* I. triangulum DGX æquare rectan-

ctangulum AErX. Ergo triangulum quoque DGX æquabit trapezium FarX (§. 263.); hisque propterea sublato spatio GxrXG, reliquum triangulum Dxr erit æquale reliquo parallelogrammo axGF (§. 266.). Triangulum autem dxe est æquale triangulo Dxr, ut ostensum est §. 179. *num. I.* Ergo triangulum quoque dxe erit æquale parallelogrammo axGF (§. 262.). Itaque cum triangulum dxe adæquet parallelogrammum axGF, & triangulum EyA parallelogrammum ayAF, triangulum dxe erit ad parallelogrammum axGF, ut triangulum EyA ad parallelogrammum ayAF; & *alternando*, ut parallelogrammum axGF est ad parallelogrammum ayAF, ita erit triangulum dxe ad triangulum EyA (*Lib.* I. §. 125.). Parallelogrammum autem axGF est ad parallelogrammum ayAF ejusdem altitudinis AE, ut est basis ax ad basim ay (*Lib. IX.* §. 95.). Igitur triangulum quoque dxe erit ad triangulum EyA, ut abscissa ax ad abscissam ay (*Lib.* I. §. 77.). Ut autem triangulum dxe ad triangulum EyA, ita est quadratum lateris xe ad quadratum lateris yA (§. 180.); cum illa triangula sint similia (§. 66.), utpote æquiangula. Ergo etiam quadratum rectæ xe erit ad quadratum rectæ yA, ut abscissa ax ad abscissam ay (*Lib. I.* §. 77.).

Rursus quoniam ex §. 179. *num. III.* triangulum BnK adæquat rectangulum EHKA, si utrique dematur trapezium nzHK, reliquum triangulum BzH erit æquale reliquo trapezio EznA (*Syn. Alg.* §. 266). Triangulum autem Mdz adæquat triangulum BzH, ut patet ex eodem *num. III.* §. 179. Ergo triangulum quoque Mdz æquabit trapezium EznA (§. 262.). Demonstravimus porro eodem §. *num.* I., triangulum eGm æquare parallelogrammum EdmA. Igitur, si trapezio EznA dematur parallelogrammum EdmA, & residuo dznm adjiciatur triangulum eGm, erit trapezium dznm una cum triangulo eGm æquale trapezio EznA, adeoque etiam triangulo Mdz (§. 261.). Constat porro, triangulum dxe æquare parallelogrammum axGF. Ergo, si trapezio dznm auferatur triangulum dxe, & residuo xznme addatur parallelogrammum axGF, erit spatium xznme una cum parallelogrammo axGF æquale trapezio dznm. Si vero spatio xznme una cum parallelogrammo axGF adjiciatur triangulum eGm, trapezio autem dznm addatur parallelogrammum EdmA, sicuti triangulum eGm adæquat parallelogrammum EdmA, ita, quod ex illa priori summa emergit, parallelogrammum aznF æquabit trapezium itidem ex posteriori additione consurgens EznA (*Syn. Alg.* §. 265.). Ostensum est autem, triangulum Mdz æquare trapezium EznA. Ergo triangulum Mdz æquale itidem erit parallelogrammo aznF (§. 261.); & ideo, cum triangulum EyA jam ostensum sit æquale parallelogrammo ayAF, triangulum EyA erit ad parallelogrammum ayAF, ut triangulum Mdz ad parallelogrammum aznF, & *alternando*, triangulum EyA erit ad triangulum Mdz, ut est parallelogrammum ayAF ad parallelogrammum aznF (*Lib.* I. §. 125.). Parallelogrammum autem ayAF est ad parallelogrammum aznF ejusdem altitudinis na, ut basis, seu abscissa ay ad basim, sive ad abscissam az (*Lib. IX.* §. 95.). Ergo etiam triangulum EyA erit ad triangulum Mdz, ut est abscissa ay ad abscissam az (*Lib.* I. §. 77.); & quoniam, ut triangulum EyA ad triangulum Mdz, ita est quadratum lateris

yA ad quadratum lateris zM (*Lib.* IX. §. 180.), ex eo nimirum, quod illa triangula, utpote æquiangula, sint similia. Igitur etiam quadratum rectæ yA erit ad quadratum rectæ zM, ut est abscissa ay ad abscissam az (*Lib.* I. §. 77.). Itaque in parabola &c. quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

184. Sicuti *parameter* axis parabolæ est recta ducta ex illius vertice ordinatis parallela, illius quidem longitudinis, ut rectangulum sub illa, & sub abscissa contentum sit æquale quadrato correspondentis semiordinatæ, ita *parameter cujuslibet secundariæ diametri parabolæ est recta ducta ex illius vertice ordinatis ad ipsam diametrum parallela, adeoque ipsam parabolam tangens, cujus longitudo tanta est, ut rectangulum, quod sub illa, & sub quavis abscissa comprehenditur, sit æquale quadrato semiordinatæ, quæ illi abscissæ correspondet*. Hinc

I.

185. *In parabola quadratum cujuslibet semiordinatæ ad quamcumque diametrum secundariam adæquat rectangulum contentum sub parametro, & sub correspondente abscissa* (*Vide Demonstr.* §. 162.); ac proinde

II.

186. *Parameter cujusvis secundariæ diametri parabolæ est tertia proportionalis post abscissam, & correspondentem semiordinatam.* (*Vide Demonstr.* §. 165.).

THEOREMA VII.

Si ex quovis puncto curvæ parabolicæ ducantur duæ rectæ lineæ in parabola, quarum altera sit axi parallela, altera ipsi axi occurrat in puncto, cujus distantia a vertice sit æqualis quartæ parti parametri, duæ hujumodi rectæ lineæ cum recta tangente ducta per illud punctum duos æquales angulos efficiunt.

187. Ex quovis puncto K curvæ parabolicæ BAC ducantur in ipsa parabola duæ rectæ lineæ KL, Ka, quarum altera KL sit parallela axi AD, altera vero Ka occurrat ipsi axi in puncto a, cujus distantia aA a vertice A sit æqualis quartæ parti AG parametri AE ipsius axis, & per punctum K ducatur tangens FM occurrens axi in puncto F. Dico, angulos aKF, LKM, quos in puncto K efficiunt rectæ Ka, KL cum tangente FM, esse inter se æquales.

Fig. 5. T.XV.

Demonstratio.

Ex puncto K ducatur ad axim semiordinata K*b*, & ex vertice A tangens AH, quæ semiordinatæ K*b* erit parallela (§. 22.). Quoniam igitur recta *b*K est dupla rectæ AH (§. 177.), quadratum semiordinatæ *b*K erit quadruplum quadrati rectæ AH (*Lib. IX.* §. 172.). Quadratum autem rectæ *b*K adæquat rectangulum E*db*A contentum sub parametro AE & sub abscissa A*b* (§. 162.). Ergo etiam rectangulum E*db*A erit quadruplum quadrati rectæ AH (*Lib. I.* §. 102.). Manifestum porro est, rectangulum E*db*A quadruplum esse rectanguli G*eb*A contenti sub eadem abscissa A*b*, & sub quarta parte AG parametri (*Lib.* IX. §. 95.). Ergo rectangulum G*eb*A erit æquale quadrato rectæ AH (*Lib. I.* §. 115.), & quoniam rectangulum NGAF adæquat rectangulum G*eb*A (*Lib.* IX. §. 88.), propterea quod recta FA rectæ A*b* sit æqualis (§. 176.); rectangulum quoque NGAF erit æquale quadrato rectæ AH (*Syn. Alg.* §. 262.); ac proinde recta AH est media proportionalis inter rectas FA, A*a* (*Lib.* IX. §. 118.); cumque recta AH ad perpendiculum rectæ F*a* incumbat, angulus FH*a* erit rectus (*Lib. VII.* §. 75.), utpote in semicirculo, qui circa rectam F*a*, veluti diametrum, describi potest, consistens. Igitur etiam angulus *a*HK erit rectus (*Lib.* III. §. 40.). Latera autem FH, HK triangulorum *a*HF, *a*HK latus commune habentium *a*H, sunt æqualia; cum propter parallelismum rectarum AH, *b*K sit FK. FH=F*b*. FA (*Lib. IX.* §. 57.), adeoque FK= 2FH, seu FH=HK, sicuti est F*b*=2FA (§. 175.). Ergo recta quoque *a*F erit æqualis rectæ *a*K (*Lib. V.* §. 73.), & ideo etiam angulus *a*KF angulo *a*FK (§. 60.). Manifestum porro est, angulum LKM æquare angulum *a*FK (*Lib. IV.* §. 14.); cum duæ F*a*, KL positæ sint parallelæ. Ergo angulus LKM angulum quoque *a*KF æquabit (*Syn. Alg.* §. 261.). Itaque ex quovis puncto &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

188. *Omnes idcirco luminis radii incidentes in curvam parabolicam BAC axi AD paralleli, post reflexionem in puncto a ipsius axis simul uniuntur.* Neque enim ex illa curva ita reflecti possunt, ut angulus reflexionis sit æqualis angulo incidentiæ, prout lex naturæ postulat, quin omnes occurrant axi AD in puncto *a*. Punctum igitur *a* est *focus*, sive *umbilicus* parabolæ BAC (§. 20.).

Corollarium II.

189. Hinc *focus*, sive *umbilicus* parabolæ est *punctum sumtum in illius axe, cujus distantia a vertice est æqualis quartæ parti ejusdem parametri.*

THEO-

THEOREMA VIII.

Semiordinata ad axim in parabola ducta ex ejus foco adæquat ſemiparametrum ipſius axis.

190. Focus parabolæ BAC ſit punctum *a*, ex quo ducatur ſemiordinata *ab* ad ipſum axim. Dico, rectam *ab* æquare dimidiam partem AG parametri AE.

Demonſtratio.

Cum quadratum *ad* ſemiordinatæ *ab* ſit æquale rectangulo E*a* (§. 162.), & abſciſſa A*a* ſit quarta pars parametri AE (§. 189.), ſicuti rectangulum E*a* eſt quarta pars quadrati EFHA ipſius parametri AE (*Lib.* IX. §. 100.),
Fig. 6. T.XV. ita ejuſdem quadrati EFHA erit quarta pars quadratum *ad* (*Lib.* I. §. 102.). Quadratum autem A*e* ſemiparametri AG eſt itidem in ratione *ſubquadrupla* ad quadratum EFHA (*Lib.* IX. §. 172.). Ergo quadratum *ad* ſemiordinatæ *ab* erit æquale quadrato A*e* ſemiparametri AG (*Lib.* I. §. 103.); adeoque etiam ſemiordinata *ab* ſemiparametro AG erit æqualis (§. 187.). Igitur ſemiordinata ad axim &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA IX.

Summa rectarum LK, Ka, quæ cum tangente FM in parabola BAC æquales angulos LKM, aKF conſtituunt, eſt æqualis rectæ DA una cum recta aA, ſeu cum diſtantia foci a a vertice A.

191. Ex puncto contactus K ducatur ad axim AD ſemiordinata K*b*.

Demonſtratio.

Quoniam recta A*b* eſt æqualis rectæ AF (§. 176.), erit A*b* + A*a* = F*a*
Fig. 5. T.XV. (*Syn. Alg.* §. 265.). Oſtenſum eſt autem, rectam *a*K æquare rectam *a*F (§. 187.). Conſtat autem in parallelogrammo K*b*DL rectam KL eſſe æqualem rectæ *b*D (*Lib.* VI. §. 20.). Igitur duæ rectæ LK, K*a* ſimul ſumtæ æquabunt rectam AD una cum recta A*a* (*Syn. Alg.* §. 265.). Itaque ſumma &c. quod erat oſtendendum.

CAPUT QUARTUM.

De Hyperbola.

DEFINITIO I.

192. *Coni ad verticem oppositi dicuntur illi, qui emergunt ex completa revolutione rectæ lineæ circa unum sui punctum ab illius extremis diversum plane immobile.* Ut si circa punctum A omnino quiescens ita moveri concipiatur recta BP, ut suis extremis punctis B, P peripherias duorum circulorum BDC, NSP describat, coni BAC, NAP ex hac revolutione emergentes, *ad verticem oppositi* nuncupantur. Fig. 7. T.XV.

COROLLARIUM.

193. *Habent ergo coni ad verticem oppositi eundem verticem, & partes ejusdem rectæ lineæ pro axe, atque insuper eadem recta linea latus utriusque coni simul determinat.*

DEFINITIO II.

194. *Hyperbola dicitur illa sectio coni, quæ determinatur plano ea ratione conum secante, ut ejus quoque basim dispescat, quin opposito lateri ipsius coni sit parallelum; ac proinde sectio ista hujusmodi est, ut illius axis occurrat lateri opposito ultra verticem directe producto.* Talis itaque est sectio DEF coni recti BAC. Quandoquidem planum ipsam determinans, basim secat BDCF, ejusque axis GE opposito lateri CA ultra verticem A producto occurrit, atque in puncto Z ei copulatur. Fig. 7. T.XV.

DEFINITIO III.

195. *Oppositæ hyperbolæ vocantur illæ, quæ in conis ad verticem oppositis eodem plano secante determinantur.* Hujusmodi sunt in conis oppositis BAC, NAP sectiones DEF, SZV.

COROLLARIUM.

196. *Eadem recta linea determinat in hyperbolis oppositis earum axim, & verticem.* Sic recta TG determinat in oppositis hyperbolis DEF, SZV axes EG, ZT, & vertices E, Z. Est enim recta TG communis sectio plani, quo fiunt sectiones ipsæ hyperbolicæ, & plani, quo determinantur triangula BAC, NAP per axim; atque adeo quo utriusque itidem hyperbolicæ axis determinatur (§. 13.).

DE-

DEFINITIO IV.

197. *Axis transversus hyperbolarum oppositarum est recta linea utrique ipsarum vertici interjecta*. Sic recta EZ dicitur *axis transversus* hyperbolarum oppositarum DEF, SZV.

DEFINITIO V.

198. *Centrum hyperbolarum oppositarum est punctum medium transversi axis* Hujusmodi est punctum R in hyperbolis oppositis DEF, SZV.

SCHOLION.

199. Cum nulla sit hyperbola, quam alia opposita comitari nequeat, *axis transversus*, & *centrum* hyperbolarum oppositarum dicitur etiam *axis trans-*
Fig. 8. T.XV. *versus*, & *centrum* hyperbolæ, quæ solitarie, nempe nulla plane ratione habita oppositæ hyperbolæ, spectatur. Sic recta EA dicitur *axis transversus* hyperbolæ CAB, ejusque *centrum* punctum illius medium M.

DEFINITIO VI.

200. *Hyperbolæ similes, & æquales dicuntur illæ, in quibus ordinatæ, adeoque etiam semiordinatæ ad axim, æqualiter respective a suo vertice distantes,*
Fig. 7. T.XV. *sunt æquales*. Hujusmodi erunt hyperbolæ DFE, SZV, si posita æqualitate abscissarum Ea, Zy, ordinatæ *bd*, *xz*, sicuti etiam semiordinatæ *ba*, *xy* fuerint æquales.

THEOREMA I.

In hyperbola quadrata semiordinatarum ad axim sunt, ut rectangula contenta sub correspondentibus abscissis, & sub recta composita ex iisdem abscissis, & ex axe transverso.

201. In cono recto BAC spectetur sectio hyperbolica DEF, cujus axis sit recta EG, axis transversus ZE, & semiordinatæ ad axim rectæ *ba*, *me*.
Fig. 7. T.XV. Dico, quadratum semiordinatæ *ba* esse ad quadratum semiordinatæ *me*, ut est rectangulum ex E*a* in Z*a* ad rectangulum ex E*e* in Z*e*.

Demonstratio.

Triangulum per axim ita secet planum hyperbolicum DEF, ut recta DG ad perpendiculum insistat diametro BC circuli baseos. Tum per puncta *a*, *e* ducantur rectæ HK, LM in plano ipsius trianguli per axim parallelæ diametro BC, & cum rectæ *ba*, *me* sint itidem parallelæ rectæ DG (§. 17.),

pla-

planum, in quo sint rectæ HK, ba, erit parallelum basi BDC, sicuti etiam planum, in quo sint rectæ LM, me. Igitur sectiones Hb Kd, Lm Mn erunt circuli (*Lib.* XI. §. 91.), quorum diametri erunt rectæ HK, LM, ipsisque ad perpendiculum incumbent rectæ ba, me, quemadmodum recta DG est perpendicularis diametro BC. Quadratum ergo semiordinatæ ba erit æquale rectangulo ex Ha in aK, & quadratum semiordinatæ me rectangulo ex Le in eM (*Lib.* IX. §. 113.); ac proinde quadratum semiordinatæ ba erit ad rectangulum ex Ha in aK, ut quadratum semiordinatæ me ad rectangulum ex Le in eM, & *alternando*, ratio quadrati semiordinatæ ba ad quadratum semiordinatæ me diversa non erit a ratione rectanguli ex Ha in aK ad rectangulum ex Le in eM (*Lib.* I. §. 125.). Ratio autem rectanguli Ha ⋈ aK ad rectangulum Le ⋈ eM componitur ex ratione rectæ Ha ad rectam Le, & ex ratione rectæ aK ad rectam eM, scilicet basium, & altitudinum (*Lib.* IX. §. 105). Ergo etiam quadratum semiordinatæ ba erit ad quadratum semiordinatæ me in ratione composita ex ratione rectæ Ha ad rectam Le, & ratione rectæ aK ad rectam eM. Manifestum est autem propter parallelismum rectarum Ha, Le in triangulo LEe, esse Ea. Ee = Ha. Le, & in triangulo eZM haud dissimili ratione esse aK. eM = Za. Ze (§. 59.). Ergo ratio quadrati semiordinatæ ba ad quadratum semiordinatæ me spectari itidem potest veluti composita ex ratione rectæ Ea ad Ee, & ex ratione rectæ Za ad rectam Ze. Constat porro, rectangulum quoque ex Ea in Za esse ad rectangulum ex Ee in Ze in ratione composita ex ratione rectæ Ea ad rectam Ee, & ex ratione, quam habet recta Za ad rectam Ze (§. 105.). Ergo ratio quadrati semiordinatæ ba ad quadratum semiordinatæ me diversa non erit a ratione rectanguli ex Ea in Za ad rectangulum ex Ee in Ze (*Lib.* I. §. 76). Igitur in hyperbola &c. quod erat ostendendum.

Corollarium.

In hyperbola quadrata semiordinatarum ad axim habent omnia eandem rationem ad suum respective rectangulum contentum sub abscissa, & sub recta composita ex abscissa, & ex axe transverso.

202. Videlicet in hyperbola DEF quadratum semiordinatæ ba est ad rectangulum ex Ea in Za, ut quadratum alterius cujuslibet semiordinatæ me ad rectangulum ex Ee in Ze. Cum enim quadratum rectæ ba sit ad quadratum rectæ me, ut rectangulum Ea ⋈ Za ad rectangulum Ee ⋈ Ze, *alternando*, quadratum rectæ ba erit ad rectangulum Ea ⋈ Za, ut quadratum me ad rectangulum Ee ⋈ Ze (*Lib.* I. §. 125.).

DE-

DEFINITIO VII.

203. *Parameter transversi axis hyperbolæ est recta linea ducta ex illius vertice, ordinatis ad axim parallela, cujus ratio ad ipsum axim transversum eadem est cum illa, quam habet quadratum cujuslibet semiordinatæ ad rectangulum contentum sub correspondente abscissa, & sub recta composita ex ipsa*
Fig. 8. T.XV. *abscissa, & ex axe transverso.* Ut si in hyperbola CAB, cujus axis transversus sit recta EA ducatur ex vertice A recta AF semiordinatis *ba*, CD parallela, cujus ratio ad axim transversum EA ab ea non sit diversa, quam habet quadratum unius semiordinatæ *ba* ad rectangulum ex A*a* in E*a*, recta AF erit *parameter* hyperbolæ CAB. Recta AF dicitur etiam *latus rectum* ipsius hyperbolæ, & axis EA *latus* ejusdem *transversum*.

COROLLARIUM.

204. Hinc *parameter transversi axis hyperbolæ ad perpendiculum ipsi axi incumbit, ipsamque hyperbolam in vertice tangit*, ut etiam diximus de parametro axis ellipseos, & parabolæ.

DEFINITIO VIII.

205. Quemadmodum in ellipsi, ita in hyperbola CAB rectangulum RFAE contentum sub parametro AF, & sub axe transverso EA dicitur *figura transversi axis* EA.

DEFINITIO IX.

206. Si parameter AF transversi axis EA fuerit ipsi axi æqualis, hyperbola CAB vocatur *æquilatera*.

DEFINITIO X.

207. *In hyperbola axis alteri conjugatus dicitur recta transiens per illius centrum, atque bifariam in illo divisa, tantæ longitudinis, ut sit media pro-*
Fig 10. T.XV. *portionalis inter axim ipsum transversum, ejusque parametrum.* Ut si in hyperbola BAC, cujus axis transversus sit recta EA, parameter recta AK, per centrum O transeat recta GH, quæ in illo bifariam, atque ad rectos angulos dividatur, sitque media proportionalis inter axim transversum EA, & illius parametrum AK, recta HG vocatur alter axis ipsius hyperbolæ BAC priori EA conjugatus, quatenus nempe hujusmodi est axis conjugatus in ellipsi (§. 81.). Hinc

Co-

COROLLARIUM I.

208. *Quadratum axis conjugati in hyperbola adæquat rectangulum contentum sub axe transverso, ejusque parametro, nempe rectangulum figuræ axis transversi* (Lib. IX. §. 111.).

COROLLARIUM II.

209. *In hyperbola quadratum semiaxis conjugati est quarta pars rectanguli figuræ axis transversi*. Ostenditur eodem modo, quo §. 83. idipsum demonstravimus de quadrato semiaxis conjugati in ellipsi.

DEFINITIO XI.

210. Hyperbolæ KGL, MHN, quarum axis transversus GH est conjugatus transverso axi EA hyperbolarum BAC, DEF, conjugatæ vocantur.

SCHOLION.

211. Quemadmodum axis conjugatus GH est media proportionalis inter axim transversum EA hyperbolarum BAC, DEF, ejusque parametrum (§. 207.), ita axis EA est media proportionalis inter axim sibi conjugatum GH, & illius parametrum. Propterea, ut in ellipsi, ita in hyperbola

I.

212. *Axes conjugati sunt duæ mediæ continuo proportionales inter suos parametros.*

II.

213. *Si axes conjugati fuerint æquales, eorum quoque parametri erunt æquales tum inter se, tum ipsis axibus. Erunt vero inæquales tum inter se, tum ipsis axibus, si axes fuerint inæquales.*

III.

214. *Ex conjugatis axibus, qui major est, habet parametrum tam seipso, quam altero axe minorem. Qui autem est minor, habet parametrum altero axe, seque ipso majorem.*

DEFINITIO XII.

215. *Regulatrix, sive directrix hyperbolæ est recta linea ducta ex puncto, extremo axis transversi per extremum parametri ejusdem axis. Subdirectrix vero, sive subregulatrix est recta ducta ex centro hyperbolæ per medium parametri.* Ut si recta EA fuerit axis transversus hyperbolæ CAB, recta AG
Fig. 8. T.XV. illius parameter, & punctum M ejusdem centrum, recta EH erit *regulatrix* sive *directrix* ipsius hyperbolæ CAB. *Subdirectrix* autem, seu *subregulatrix* recta MQ.

COROLLARIUM.

216. *Subregulatrix hyperbolæ est parallela ejusdem regulatrici.* Patet ex dictis de *subdirectrice* ellipseos (§. 80.).

THEOREMA II.

In hyperbola quadratum cujuslibet semiordinatæ ad axim adæquat rectangulum ex abscissa, & ex ipsa semiordinata usque ad directricem producta.

217. In hyperbola CAB, cujus axis transversus sit recta EA, parameter
Fig. 8. T.XV. recta AF, & regulatrix recta EP, sumatur semiordinata DC. Dico, hujus quadratum æquare rectangulum ADPc contentum sub abscissa AD, & sub recta DP.

Demonstratio.

Cum enim quadratum rectæ DC sit ad rectangulum ex DA in DE, ut parameter AF ad axim transversum EA (§. 203.), sitque AF. AE=DP. DE (*Lib.IX.§.60.*), quadratum semiordinatæ DC erit ad rectangulum ex DA in DE, ut est recta DP ad rectam DE (*Lib.I.§.78.*). Ut autem recta DP ad rectam DE, ita est rectangulum ex DP in DA ad rectangulum ex DE in eandem DA (*Lib.IX.§.95.*). Ergo quadratum rectæ DC erit ad rectangulum ex DA in DE, ut est rectangulum ex DP in DA, scilicet ADPc, ad idem rectangulum ex DA in DE (*Lib.I.§.76.*). Igitur quadratum semiordinatæ DC adæquat rectangulum ADPc (§.103.); ac proinde in hyperbola &c. quod erat ostendendum.

Co-

COROLLARIUM I.

Semiordinatæ ad axim in hyperbola eo minores sunt, quo vertici sunt propiores.

218. Sic in hyperbola CAB semiordinata *ab* proximior vertici A est minor remotiore DC. Etenim, cum quadratum semiordinatæ *ab* sit æquale rectangulo A*adx*, & quadratum semiordinatæ DC rectangulo ADP*e*, sicuti rectangulum A*adx* deficit a rectangulo ADP*e*, ita quadratum semiordinatæ *ab* deficiet a quadrato semiordinatæ DC; adeoque etiam recta *ab* minor erit recta DC.

COROLLARIUM II.

Etiam ordinatæ ad axim in hyperbola eo majores sunt, quo magis a vertice recedunt.

219. Ordinatæ namque sunt inter se, ut semiordinatæ (§. 127.).

COROLLARIUM III.

In hyperbola quadratum cujuslibet semiordinatæ ad axim excedit rectangulum contentum sub parametro, & abscissa; atque hujusmodi excessus est rectangulum simile rectangulo figuræ axis transversi.

220. Nimirum in hyperbola CAB quadratum semiordinatæ *ab* excedit rectangulum A*ab*F contentum sub parametro AF, & sub abscissa A*a*. Manifestum quippe est; quadratum semiordinatæ *ab* æquare rectangulum A*adx* (§. 217.), quod superat rectangulum A*ab*F quantitate rectanguli F*bdx*. Constat quoque, rectangulum F*bdx* esse simile rectangulo EAFR (*Lib.* IX. §. 16., quod est figura transversi axis AE (§. 205.).

SCHOLION.

221. Propter hunc excessum propterea ista coni sectio *hyperbola*, nempe *excedentis*, nomen obtinuit.

COROLLARIUM IV.

222. Hinc spectando hyperbolam extra conum, definiri potest: *Figura plana, curva linea in se minime redeunte comprehensa, in qua semiordinatarum ad axim quadrata majora sunt rectangulis contentis sub parametro, & sub correspondentibus abscissis, & quidem ea constanti lege, ut hujusmodi excessus sint rectangula omnino similia rectangulo figuræ axis transversi.*

COROLLARIUM V.

In hyperbola quadrata semiordinatarum ad axim magis crescunt in recessu a vertice, quam augeantur correspondentes abscissæ.

Fig. 8. T.XV. 223. Videlicet quadratum semiordinatæ DC in hyperbola CAB magis superat quadratum semiordinatæ *ab*, quam abscissa AD excedat abscissam A*a*. Cum enim quadratum semiordinatæ DC sit æquale rectangulo ADP*e*, & quadratum semiordinatæ *ab* rectangulo A*adx*, excessus quadrati semiordinatæ DC supra quadratum semiordinatæ *ab* erit æqualis excessui rectanguli ADP*e* supra rectangulum A*adx*. Rectangulum autem ADP*e* magis superat rectangulum A*adx*, quam rectangulum ADOF excedat rectangulum A*ab*F. Ergo quadratum quoque semiordinatæ DC magis superabit quadratum semiordinatæ *ab*, quam rectangulum ADOF excedat rectangulum A*ab*F. Constat autem, abscissam AD ita excedere abscissam A*a*, quemadmodum rectangulum ADOF excedit rectangulum A*ab*F; cum abscissa AD sit ad abscissam A*a*, ut rectangulum ADOF ad rectangulum A*ab*F (*Lib.* IX. §. 99.). Ergo quadratum semiordinatæ DC magis quoque superabit quadratum semiordinatæ *ab*, quam abscissa AD abscissam A*a*; adeoque &c.

COROLLARIUM VI.

224. Hinc aliter quoque definiri potest hyperbola, videlicet eam esse *figuram planam curva linea in se minime redeunte comprehensam, in qua semiordinatarum ad axim quadrata magis crescunt in recessu a vertice, quam augeantur correspondentes abscissæ.*

COROLLARIUM VII.

In hyperbola quævis semiordinata ad axim est media proportionalis inter abscissam, & rectam sibi correspondentem, contentam inter axim, & rectam hyperbolæ directricem.

225. Semiordinata nimirum *ab* ad axim AD in hyperbola CAB est media proportionalis inter abscissam A*a*, & rectam *ad*. Cum enim quadratum rectæ *ab* sit æquale rectangulo ex A*a* in *ad* (§. 217.); erit ∺ A*a*. *ab*. *ad* (*Lib.* IX. §. 118.).

THEO-

THEOREMA III.

In hyperbola CAB, cujus axis sit recta AD, parameter AG, subdirectrix MQ, si producatur semiordinata ba *usque ad subdirectricem, quadratum ipsius* ba *erit duplum trapezii* Nya*A*.

226. Producta usque ad directricem EH ipsa semiordinata *ba*, ex vertice A ad extremum V agatur recta AV.

Demonstratio.

Coincidit cum ea, qua §. 91. ostensum est, quadratum semiordinatæ *ba* in ellipsi ABCD (fig. 18. Tab. XIII.) duplum esse trapezii AbzN. Eodem quippe ratiocinio demonstrabitur trapezium NyaA in hyperbola CAB æquale triangulo VA*a*, adeoque subduplum rectanguli ex A*a* in *a*V, cui quadratum semiordinatæ *ab* est æquale (§. 117.), quo in ellipsi ABCD demonstratum fuit, trapezium AbzN æquare triangulum *b*A*e*. Itaque in hyperbola &c. quod erat ostendendum. Fig. 8. T.XV.

THEOREMA IV.

Si in hyperbola BAC, cujus axis transversus sit recta EA, parameter recta AG, subdirectrix recta MQ, & semiordinata ad axim recta ab, *fiat, ut recta* ea *ad semiordinatam* ab, *ita ipsa semiordinata* ab *rectam* a*F compositam ex abscissa* a*A, & ex segmento AF axis transversi, recta* Fb *ducta ex puncto F ad extremum* b *ipsius semiordinatæ, erit tangens hyperbolam in ipso puncto* b.

227. In recta F*b* sumatur quodvis punctum *d* diversum a puncto *b*, ex quo ad axim AP agatur recta semiordinata *dn*, quæ occurrat subdirectrici MQ in puncto *x*, & jungantur puncta F, *e* recta F*e*.

Demonstratio.

Diversa non est ab illa, qua §. 94. demonstravimus, rectam LF tangere ellipsim ABCD in puncto F (fig. 1. Tab. XIV.) si fuerit ∻ MN. NF. NL. Ut enim in ellipsi ABCD quadratum rectæ NF est duplum trianguli MLN, ita in hyperbola BAC quadratum rectæ *ab* erit duplum trianguli *e*F*a*; cumque quadratum rectæ *ab*, sit etiam duplum trapezii N*ea*A (§. 226.), triangulum *e*F*a* æquabit trapezium N*ea*A; & ideo sublato communi trapezio *exAa*, reliquum triangulum *x*FA erit æquale reliquo triangulo N*ex* ac proinde sicuti triangulum N*ex* est majus trapezio N*zyx*, ita eodem Fig. 9. T.XV.

trapezio majus erit triangulum xFA, & si utrique adjiciatur trapezium $xynA$, triangulum yFn majus erit trapezio $NznA$. Quadratum autem semiordinatæ nm est duplum trapezii $NznA$, & quadratum rectæ nd est duplum trianguli yFn; cum sit æquale rectangulo ex yn in nF propter analogiam $yn . nd = nd . nF$ (§. 93.), ex eo quod positum fuerit $ea . ab = ab . aF$. Ergo quadratum semiordinatæ nm erit ad trapezium $NznA$, ut est quadratum rectæ nd ad triangulum yFn; atque adeo sicuti trapezium $NznA$ deficit a triangulo yFn, ita quadratum rectæ nm deficiet a quadrato rectæ nd; & ideo recta nm erit minor recta nd, seu punctum d erit extra curvam hyperbolicam BAC, eademque ratione extra eandem curvam erunt reliqua omnia puncta rectæ Fb a puncto b diversa. Itaque recta Fb tangit hyperbolam in puncto b (§. 19.). Si ergo in hyperbola &c. quod erat &c.

COROLLARIUM I.

Recta tangens hyperbolam, in uno tantum puncto ipsam tangit.

228. Id enim necessario sequitur ex eo, quod punctum b dumtaxat sit rectæ Fb, & curvæ hyperbolicæ BAC commune.

COROLLARIUM II.

229. Si fiat $Pa = ae$, & ducatur recta Pb, hæc erit tangenti Fb perpendicularis. Quippe, cum stante hypothesi habeatur $\div Pa . ab . aF$, angulus PbF erit rectus, sive triangulum PbF erit rectangulum (*Lib.* IX. §. 74.).

DEFINITIO XIII.

230. Quemadmodum in ellipsi, & in parabola, ita in hyperbola BAC recta Pb dicitur *normalis* tangenti Fb, recta aP *subnormalis*, & recta aF *subtangens*.

COROLLARIUM III.

231. In hyperbola BAC semiparameter NA est ad subnormalem aP, ut est semiaxis transversus MA ad rectam Ma compositam ex semiaxe MA, & ex abscissa Aa. Cum enim rectæ Na, ea sint parallelæ (§. 22.), erit $NA . ea = MA . Ma$ (*Lib.* IX. §. 59.); adeoque $NA . aP = MA . Ma$, propter æqualitatem scilicet duarum Pa, ea.

COROLLARIUM IV.

232. Quemadmodum in ellipsi, ita in hyperbola BAC, si semiordinata ba, usque ad directricem EH directe producatur, subtangens Fa erit ad abscissam Aa, ut est recta aH ad rectam ae. Etenim, ex eo quod sit $\div ea . ab . aF$, rectangulum $ea \times aF$ erit æquale quadrato mediæ ab (§. 11.).

Ei-

Eidem autem quadrato eſt æquale rectangulum $Ha \times aA$ ex natura hyperbolæ (§. 217.). Ergo erit $ea \times aF = Ha \times aA$ (*Syn. Alg* §. 259.); & ideo $Fa . aA = Ha . ae$ (*Lib.* IX. §. 114.).

COROLLARIUM V.

233. Hinc rectæ FH, Ae erunt inter ſe parallelæ (§. 63.), & recta FH bifariam dividet *parametrum* GA, ſeu tranſibit per punctum N, in quo *parameter* ſecatur a ſubdirectrice MQ. Rectæ namque GN, NA ſunt æquales inter ſe, utpote æquales eidem He (*Lib.* VI. §. 20.); cum utrumque quadrilaterum GHeN, NHeA, ut in ellipſi demonſtravimus, ſit parallelogrammum.

COROLLARIUM VI.

234. Erit ergo, ut in ellipſi, ita in hyperbola ſemiaxis tranſverſus MA media proportionalis inter rectas Ma, MF. Quandoquidem ob paralleliſmum rectarum NF, eA in triangulo eMA habetur Me. MN = MA. MF (*Lib.* IX. § 57), & in triangulo eMa haud diſſimili ratione Ma. MA = Me. MN. Ergo erit Ma. MA = MA. MF (*Lib.* I. §. 76.).

COROLLARIUM VII.

235. Punctum F propterea, in quo axis tranſverſus EA hyperbolæ ſecatur a tangente, infra centrum M perpetuo reperitur. Enimvero, cum ſit Ma. MA = MA. MF, ſicuti recta Ma ſemper excedit rectam MA, ita recta MA major ſemper erit recta MF (§. 45.).

COROLLARIUM VIII.

236. Rurſus etiam in hyperbola erit Ea. Aa = EF. FA. Perſpicuum ſiquidem eſt, eſſe Ea. EM = Fa, FA; cum utraque hujuſmodi ratio ſit æqualis rationi, quam habet recta Ha ad rectam He propter paralleliſmum rectarum HE, eM in triangulo HaE, & rectarum HF, eA in triangulo HaF. Haud diſſimili quoque ratione habetur EM. EF = Aa. Fa, quod nempe utraque iſta ratio adæquet rationem rectæ HN ad rectam HF, ſtante paralleliſmo rectarum HE, NM in triangulo HFE, & rectarum Ha, NA in triangulo HFa. Igitur conſtitui poſſunt duæ ſeries magnitudinum *perturbatam proportionem* habentium, nimirum

Ea . EM . EF
Aa . Fa . FA

Ergo erit Ea. EF = Aa. FA (§. 181); & ideo Ea. Aa = EF. FA (§. 125.).

COROLLARIUM IX.

237. Ac demum, ductis tangentibus verticalibus AT, ER occurrentibus la-

terali bR, erit $Rb.Tb = RF.FT$. Similia siquidem sunt triangula RFE, FAT, utpote æquiangula, ratione parallelismi rectarum tangentium RE, AT. Igitur erit $RF.FT = EF.FA$ (*Lib.IX.§.67.*). Producta autem recta AT in V, habetur $Rb.Tb = Eb.bV$ (§.58.), quod in triangulo RbE rectæ RE, TV sint parallelæ. Eandem autem ob causam constat, in triangulo aEb esse $Eb.bV = Ea.aA$. Ergo erit $Rb\ Tb = Ea.aA$ (*Lib.I.§.76.*). Demonstravimus autem, esse $RF.FT = EF.FA$, sicuti etiam $Ea.aA = EF.FA$ (§.236.). Ergo erit quoque $Rb.Tb = RF.FT$ (*Lib.I.§.76.*).

THEOREMA VI.

Si ex centro hyperbolarum oppositarum æqualium, & similium ad extrema ex adverso posita æqualium semiordinatarum ad axim ducantur duæ rectæ lineæ, illæ æquales erunt inter se, & in directum positæ.

Fig.10. T.XV. Sint duæ hyperbolæ oppositæ BAC, DEF sibi mutuo similes, & æquales, ex quarum centro O ad extrema ex adverso posita d, e semiordinatarum æqualium ad, eb ad axim ab ducantur rectæ Od, Oe.

I.

238. Dico primo, rectas Od, Oe esse inter se æquales.

Demonstratio.

Cum enim semiordinatæ ad, be positæ sint æquales, correspondentes earum abscissæ Ea, Ab erunt quoque inter se æquales (§. 200.). Æquales sunt autem etiam duæ EO, AO (§. 198.). Ergo tota Oa æquabit totam Ob (*Syn. Alg.§.265.*). Duo porro anguli daO, ebO sunt æquales inter se, utpote recti (§ 12.). Igitur duo triangula daO, beO habent duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulos, qui æqualibus lateribus continentur, inter se æquales. Quamobrem æquales erunt inter se etiam eorum bases Od, Oe (*Lib.V.§.73.*).

II.

239. Dico 2. lineas Od, Oe esse in directum positas, seu unam rectam lineam ed constituere.

Demonstratio.

Enimvero cum latera Oa, Ob, sicuti etiam Od, Oe triangulorum aOd, eOb sint æqualia inter se, quemadmodum & eorum bases ad, eb, æquales quoque erunt inter se verticales ipsorum anguli aOd, eOb (§. 82.). Sunt autem ad verticem oppositi. Ergo rectæ Od, Oe sunt in directum positæ, seu unam rectam

ctam *ed* constituunt (*Lib.* III. §. 55.). Si ergo ex centro &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Quavis recta linea transiens per centrum hyperbolarum oppositarum aequalium, & similium, atque ad ipsas curvas utrinque terminata, bifariam in illo dividitur.

240. Ut si per centrum O hyperbolarum oppositarum BAC, DEF aequalium, & similium ducatur recta *ed*, quae utrinque curvis ipsis hyperbolicis occurrat, divisa erit bifariam in ipso centro O. Non enim potest duci ex puncto *e* per ipsum centrum recta linea, quae occurrat curvae hyperbolicae DEF, quin illa transeat per punctum *d*. Quandoquidem, cum duae rectae *e*O, O*d* sint in directum positae, si secus res contingeret, duae rectae lineae commune segmentum haberent, quod repugnat (*Lib.* III. § 48.).

Corollarium II.

Recta conjungens extrema ex adverso posita aequalium semiordinatarum ad axim in hyperbolis oppositis aequalibus, & similibus, transit per illarum centrum.

241. Recta nimirum conjungens extrema *d*, *e* aequalium semiordinatarum *ad*, *be* ad axim in hyperbolis oppositis, aequalibus, & similibus DEF, BAC, transit per illarum centrum O. Etenim, si secus, cum duae O*d*, O*e* unam rectam constituant, duae rectae spatium concluderent, secus ac fieri queat (*Lib.* IV. §. 7.).

Theorema VII.

Si ex puncto E, in quo curva hyperbolica BAC secatur a recta HM ducta ex illius centro H, ducatur tangens EG occurrens axi transverso KA in puncto G, & ex puncto verticali A agatur tangens AF occurrens ipsi recta HM in puncto F, triangula HAF, HGE erunt aequalia.

242. Ex puncto contactus E ducatur ad axim semiordinata ED.

Demonstratio.

Quoniam rectae AF, DE sunt parallelae (§. 22.), triangula DHE, AHF erunt similia (*Lib.* IX §. 65.); ac proinde triangulum DHE erit ad triangulum AHF in ratione *duplicata* lateris HD ad latus sibi homologum HA (§. 168.). Ratio autem rectae HD ad rectam HG est *duplicata* illius, quam habet recta HD ad rectam HA (*Lib.* I. §. 177.); cum sit ∺ HD. HA. HG (§. 234.). Ergo triangulum DHE erit ad triangulum AHF, ut recta HD ad rectam HG Fig. 2. T. XVI.

(*Lib.* I. §. 78). Constat autem, triangulum DHF esse itidem ad triangulum GEH ejusdem altitudinis ED, ut recta HD ad rectam HG (*Lib.* IX. §. 96.). Igitur eadem est ratio trianguli DHE ad utrumque triangulum AHF, GEH (*Lib.* I. §. 76.); & ideo duo ista triangula AHF, GEH sunt æqualia (§. 113.). Si ergo ex puncto &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

343. Cum duo triangula AHF, GEH sint æqualia, si utrique dematur commune trapezium HG*b*F, reliquum triangulum G*b*A reliquo triangulo F*b*E erit æquale (*Syn. Alg.* §. 266.).

Corollarium II.

244. Triangulum DGE adæquat trapezium FADE. Quandoquidem, si triangulis æqualibus G*b*A, F*b*E addatur trapezium A*b*ED, triangulum DGE æquabit trapezium FADE (§. 265.).

Corollarium III.

245. Ducta ex vertice A recta AM parallela tangenti EG, atque secanti HM occurrens in puncto M, triangulum MFA erit æquale trapezio EGAM. Hæc enim emergunt ex additione trapezii ME*b*A triangulis æqualibus G*b*A, F*b*E, ut est manifestum.

Lemma I.

Si recta linea secetur bifariam, eique recta quædam adjiciatur, rectangulum contentum sub tota, & sub parte adjecta, una cum quadrato partis dimidiæ est æquale quadrato rectæ compositæ ex parte dimidia, & ex parte adjecta.

Fig. 4. T.XVI. 246. Recta AB bifariam secetur in C, eique recta quædam adjiciatur DB. Dico, rectangulum AE compositum ex tota AD, & ex adjecta BD, una cum quadrato CF partis dimidiæ AC, esse æquale quadrato CG rectæ CD compositæ ex parte dimidia CB, & ex adjecta BD.

Demonstratio I.

Ponatur $AC = CB = a$, $BD = b$, adeoque $AB = 2a$, $AD = 2a + b$, & $CD = a + b$. Igitur erit $AD \times BD = 2ab + bb$, $\overline{AC}^2 = aa$; ac proinde $AD \times BD + \overline{AC}^2 = 2ab + bb + aa = aa + 2ab + bb$. Est autem etiam $\overline{CD}^2 = aa + 2ab + bb$. Ergo erit $AD \times BD + \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2$.

De-

Demonstratio II.

Descripto circa rectam BA semicirculo BHA, atque ex puncto D ducta tangente DH, nec non ex centro C ad punctum contactus H recta CH, manifestum est, rectangulum AE esse æquale quadrato tangentis DH (*Lib* IX. §. 147.); & quoniam quadratum CF rectæ CB est æquale quadrato rectæ CH (*Lib* I. §. 187.), rectangulum AE una cum quadrato CF erit æquale quadratis rectarum DH, HC simul sumtis (*Sym. Alg.* §. 265.). Hisce autem duobus quadratis est æquale etiam quadratum CG rectæ DC (*Lib.*VI. §. 37.), cum angulus CHD in triangulo CHD sit rectus (*Lib. VII.* §. 50.). Ergo rectangulum AE una cum quadrato CF erit æquale quadrato CG (*Sym. Alg.* §. 162.). Itaque si recta linea &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA VIII.

In hyperbola quævis recta linea ducta ex illius centro dividit bifariam omnes rectas parallelas tangenti ductæ per punctum, in quo curva hyperbolica ab illa recta secatur.

247. In hyperbola BAC, cujus axis transversus sit recta Ea, ducatur ex illius centro D recta quævis DO secans ipsam curvam hyperbolicam BAC in puncto A, ex quo ducatur tangens Ad occurrens lateri transverso in puncto d. Dico, rectam DO bifariam secare in hyperbola omnes rectas lineas parallelas tangenti Ad. Fig. 4. T.XVI.

Demonstratio.

I.

Spectetur primo recta eH. Hac itaque directe producta in b, ducatur tangens verticalis aF, nec non per punctum e ordinata Te ad axim, & ex puncto A semiordinata AK, sicuti etiam ex puncto H semiordinata HL. Quoniam igitur rectæ aF, KA, Lr in triangulo LDr sunt parallelæ, triangula DaF, DKA, DLr erunt similia (*Lib.* IX. §. 65.); ac proinde triangula DLr, DKA, DaF erunt inter se, ut quadrata suorum laterum homologorum DL, DK, Da (*S.* 166.), videlicet triangulum DLr erit ad triangulum DaF ut quadratum lateris DL ad quadratum lateris Da, & triangulum DKA ad triangulum DaF, ut quadratum lateris DK ad quadratum lateris Da. Igitur etiam excessus trianguli DLr supra triangulum DaF, nempe trapezium FaLr, erit ad excessum trianguli DKA supra idem triangulum DaF, scilicet ad trapezium FaKA, ut excessus quadrati rectæ DL supra quadratum rectæ Da ad excessum quadrati rectæ DK supra quadratum

dratum ejusdem rectæ D*a* (§. 109.), nimirum ut rectangulum ex EL in L*a* ad rectangulum ex EK in K*a* (§. 246.). Ut autem rectangulum ex EL in L*a* ad rectangulum ex EK in K*a*, ita est quadratum semiordinatæ LH ad quadratum semiordinatæ KA (§. 201.); & ut quadratum rectæ LH ad quadratum rectæ KA, ita est triangulum LH*b* ad triangulum KA*d* (*Lib. IX.* §. 166.); cum hujusmodi triangula, utpote æquiangula, sint similia (§. 66.); Ergo trapezium F*a*L*r* erit ad trapezium F*a*KA, ut triangulum LH*b* ad triangulum KA*d* (*Lib. I.* §. 76.). Trapezium autem F*a*KA adæquat triangulum KA*d* (§. 244.). Igitur etiam trapezium F*a*L*r* æquabit triangulum LH*b* (*Lib. I.* §. 128.). Eodem modo demonstrabitur, triangulum *xeb*, & trapezium *ax*GF esse æqualia. Quamobrem, si triangulo LH*b* dematur triangulum *xeb*, & trapezio F*a*LH trapezium *ax*GF, trapezium residuum H*ex*L erit æquale residuo trapezio L*r*G*x* (*Syn. Alg.* §. 266.); ac proinde, si hisce auferatur commune spatium L*rbex*, reliquum triangulum *eb*G erit æquale reliquo triangulo *rb*H (*Ibid.*). Duo autem hujusmodi triangula sunt similia (*Lib. IX.* §. 66); cum sint æquiangula, prout rem attente consideranti planum fiet. Igitur duo ipsorum homologa latera *eb*, *b*H sunt æqualia (§. 110.); & ideo recta *e*H a recta DO bifariam dividitur.

II.

Sit modo recta *a*N parallela tangenti A*d*. Perspicuum est, triangulum MN*a* æquare trapezium F*a*MS. Quandoquidem eodem ratiocinio, quo *numero præcedenti* demonstravimus, triangulum LH*b* esse æquale trapezio F*a*L*r*, nunc quoque ostendemus, triangulum MN*a* æquare trapezium F*a*MS. Igitur, si triangulo MN*a*, & trapezio F*a*MS auferatur commune spatium S*ma*M, reliquum triangulum S*m*N reliquo triangulo *am*F erit æquale (*Syn. Alg.* §. 266.); cumque duo ista triangula, utpote æquiangula, sint similia, æqualia erunt latera ipsorum homologa N*m*, *ma* (§. 110.); & ideo etiam recta N*a* bifariam divisa erit a recta DO.

III.

Tangenti demum A*d* sit parallela recta CT, quæ hyperbolæ axim secet in puncto *y*. Superiori ratiocinio adhibito, palam fiet, triangulum C*y*P esse æquale trapezio OF*a*P. Ducta vero ex puncto T ordinata T*e*, eaque producta in G, sumatur in axe segmentum *xb* æquale segmento *xy*, & jungantur puncta *e*, *b* recta *eb*. Cum igitur anguli T*xy*, *bxe* sint æquales (*Lib. III.* §. 51.), sicuti etiam rectæ T*x*, *xe* (§. 12.), & *bx*, *xy* duo triangula T*xy*, *bxe* erunt æqualia (*Lib. V.* §. 74.); & cum æquales itidem sint anguli alterni *xeb*, *x*T*y* (§. 82.), rectæ *be*, T*y* erunt parallelæ (*Lib. IV.* §. 12.), & ideo sicuti recta T*y*, ita recta *be* erit parallela tangenti A*d* (§. 18.); ac proinde triangulum *bxe* æquabit trapezium *ax*GF, ut ex superius traditis manifestum efficitur; & ideo etiam triangulum T*yx* erit trapezio *ax*GF æquale. Quamobrem trapezium POG*x* una cum triangulo *yx*T æquabit trape-

pezium POΓ*a*: atque adeo etiam triangulum PC*y* (*Syn Alg.* §. 261.). Hinc, demto communi trapezio ON*y*P, reliquum triangulum O*n*C erit æquale reliquo triangulo T*n*G (§. 266.); cumque duo ista triangula sint æquiangula, adeoque similia, habebunt latera homologa T*n*, *n*C inter se æqualia (§. 110.). Igitur etiam recta TC bifariam dividitur a recta DO. Quamobrem in hyperbola &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Omnis recta in hyperbola transiens per illius centrum diversa ab axe est diameter secundaria.

248. Dividit enim bifariam omnes rectas tangenti parallelas.

COROLLARIUM II.

Quævis recta in hyperbola ducta ex illius centro dividit bifariam segmentum quodcunque hyperbolicum determinatum a recta ad illam ordinata.

249. Sic recta GM in hyperbola BAC ducta ex illius centro G dividit bifariam segmentum hyperbolicum *dand* determinatum a recta *dn* ipsi GM ordinatim applicata. Quandoquidem ductis tot ordinatis, quot sunt puncta in abscissa A*x*, cum omnes bifariam a recta *a*M dividantur, tot erunt elementa spatii hyperbolici *dax*, quot sunt elementa spatii hyperbolici *nax*. Sunt autem elementa unius æqualia elementis alterius, si in eadem a vertice distantia utrobique sumantur. Ergo spatia *dax*, *nax* sunt æqualia (*Lib.* IX. §. 53.). Fig. 7. T. XVI.

DEFINITIO XIV.

250. Si recta AD ultra centrum D producta, fiat DQ=DA, recta AQ dicitur *diameter secundaria transversa* hyperbolæ, quemadmodum recta E*a* *transversus* ejusdem *axis* nuncupatur. Fig. 4. T. XVI.

COROLLARIUM III.

In hyperbola omnis diameter secundaria transversa est major axe transverso.

251. Nimirum diameter quæcunque secundaria transversa *de* hyperbolæ BAC est major axe transverso EA. Etenim ductis ad axim semiordinatis *da*, *eb*, cum in triangulo *da*O angulus *da*O sit rectus (§. 12.), atque propterea major angulo *ad*O (*Lib.* V. §. 44.). Eadem ratione recta *e*O erit major recta O*b*. Igitur tota *de* excedet rectam *ab*; ac proinde etiam rectam EA. Fig. 10. T. XV.

THEO-

THEOREMA IX.

Quadrata semiordinatarum ad quamlibet secundariam diametrum hyperbolæ sunt directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus abscissis, & sub recta composita ex diametro transversa, & ex abscissa respective.

252. Recta DO sit diameter secundaria hyperbolæ BAC, ejusque axis recta LP, & centrum D. Rectæ vero *eb*, *am*, *Tn* sint semiordinatæ ad ipsam diametrum. Dico, quadratum semiordinatæ *eb* esse ad quadratum semiordinatæ *am*, ut rectangulum ex abscissa *Ab*, & ex recta *Qb* composita ex diametro transversa QA, & ex abscissa *Ab*, ad rectangulum contentum sub abscissa *Am*, & sub recta *Qm*. Similiter quadratum semiordinatæ *am* esse ad quadratum semiordinatæ *Tn*, ut est rectangulum ex *Am* in *Qm* ad rectangulum ex *An* in *Qn*. Fig. 4. T.XVI

Demonstratio.

Ductis tangentibus *a*F, A*d*, nec non per punctum *e* recta *x*G parallela tangenti *a*F; in directum quoque producta semiordinata *be* in *b*, cum triangulum *xbe* sit æquale trapezio *dx* GF, ut §. 247. *num. I.* demonstravimus, si utrique auferatur commune trapezium *axez*, reliquum triangulum *azb* æquabit residuum trapezium *ze*GF (*Syn. Alg* §. 266.); ac proinde etiam triangulum *aod* duobus trapeziis *bzod*, *ze*GF simul sumtis erit æquale (§. 265.). Constat autem, triangulum *o*AF æquare triangulum *aod* (§. 242.). Ergo triangulum *o*AF erit itidem æquale duobus trapeziis *bzod*, *ze*GF (*Syn. Alg* §. 261.); demtoque trapezio GF*ou*, triangulum G*u*A erit æquale trapezio *dbeu*; quibus si adjiciatur trapezium *ueb*A, triangulum G*eb* æquabit trapezium *dbb*A (§. 265.). Perspicuum porro est, triangulum F*am* esse æquale trapezio *dam*A (§. 245.). Ergo triangulum G*eb* erit ad triangulum F*am*, ut est trapezium *dbb*A ad trapezium *dam*A. Ut autem triangulum G*eb* ad triangulum F*am*, ita est quadratum rectæ *eb* ad quadratum rectæ *am* (*Lib* IX. §. 166); cum duo illa triangula, utpote æquiangula, sint similia (§. 66.), & rectæ *eb*, *am* sint latera ipsorum homologa (§. 67.). Ergo quadratum rectæ *eb* erit ad quadratum rectæ *am*, ut est trapezium *dbb*A ad trapezium *dam*A (*Lib.*I. §. 76.), nempe ut excessus trianguli *b*D*b* supra triangulum AD*d* ad excessum trianguli *m*D*a* supra idem triangulum AD*d*. Hujusmodi porro excessus sunt directe inter se, ut excessus quadrati lateris D*b* supra quadratum lateris DA ad excessum quadrati lateris D*m* supra quadratum ejusdem lateris DA (§. 109.); propterea quod cum ob parallelismum rectarum *d*A, *bb*, *am* triangula *d*DA, *b*D*b*, *a*D*m* sint similia (*Lib.*IX. §. 65.), adeoque sint ut quadrata suorum laterum homologorum DA, D*b*, D*m* (*Lib.*IX. §. 166). Igitur etiam quadratum lateris *eb* erit ad quadratum lateris *am*,

ut

ut est excessus quadrati lateris Db supra quadratum lateris DA ad excessum quadrati lateris Dm supra quadratum lateris DA. Constat autem, excessum quadrati lateris Db supra quadratum lateris DA esse rectangulum ex Ab in Qb, & excessum quadrati lateris Dm supra quadratum lateris AD esse rectangulum ex Am in Qm (§. 246.). Ergo quadratum semiordinatæ eb est ad quadratum semiordinatæ am, ut rectangulum ex Ab in Qb ad rectangulum ex Am in Qm.

Ducta modo ex puncto T ordinata Te, eaque producta in G, atque per punctum e ducta bb parallela tangenti Ad, manifestum est ex superius traditis, triangulum xbe æquare triangulum yxT. Hinc trapezium $nbby$ erit æquale trapezio $nbeT$ (*Syn. Alg.* §. 265.); & si utrique adjiciatur triangulum Geb, triangulum GTn æquabit trapezium $nbby$ una cum triangulo Geb (§. 265.). Trapezium autem $bbAd$ est æquale triangulo Geb, sicuti supra ostensum est, ut proinde trapezium $Adyn$ sit æquale trapezio $nbby$ una cum triangulo Geb (§. 265.). Ergo triangulum GTn erit æquale trapezio $Adyn$ (§. 261.); eritque propterea triangulum GTn ad trapezium $Adyn$, ut est triangulum Fam ad trapezium $damA$, & *alternando*, triangulum GTn erit ad triangulum Fam, ut trapezium $Adyn$ ad trapezium $damA$ (*Lib.* I. §. 125.), nempe ut excessus trianguli nDy supra triangulum ADd ad excessum trianguli mDa supra idem triangulum ADd, & ideo ut excessus pariter quadrati lateris Dn supra quadratum lateris DA ad excessum quadrati lateris Dm supra quadratum ejusdem lateris DA (§. 109.), videlicet ut rectangulum ex An in Qn ad rectangulum ex Am in Qm (§. 246.). Ut autem triangulum GTn ad triangulum sibi simile Fam, ita quadratum lateris Tn ad quadratum lateris sibi homologi am (*Lib. IX.* §. 166.). Igitur quadratum rectæ Tn erit ad quadratum rectæ am itidem, ut rectangulum ex An in Qn ad rectangulum ex Am in Qm (*Lib.* I. §. 78.). Quadrata ergo semiordinatarum &c. quod erat &c.

C o r o l l a r i u m.

In hyperbola quadrata semiordinatarum ad quamlibet diametrum secundariam habent omnia eandem rationem ad suum respective rectangulum contentum sub abscissa, & sub recta composita ex ipsa abscissa, & ex diametro transversa.

253. Perspicuum fiet eodem ratiocinio, quo §. 201. idipsum ostensum est de quadratis semiordinatarum ad axim.

S c h o l i o n.

254. Hinc *parameter transversæ diametri in hyperbola est recta linea ducta ex illius vertice ordinatis parallela, adeoque hyperbolam tangens, cujus ratio ad diametrum ipsam transversam eadem est cum illa, quam habet quadratum cujuslibet semiordinatæ ad rectangulum contentum sub correspondente* ab-

abscissa, & sub recta composita ex eadem abscissa, & ex ipsa diametro transversa, cujusmodi itidem est parameter axis transversi.

DEFINITIO XV.

255. Quemadmodum in ellipsi diameter secundaria alteri conjugata est recta transiens per centrum, media proportionalis inter illam diametrum, ejusque parametrum (§. 123.), ita *in hyperbola illa recta linea transiens per centrum, in quo bifariam dividatur, dicitur diameter transversæ diametri conjugata, quæ est media proportionalis inter diametrum ipsam transversam, & illius parametrum.*

COROLLARIUM I.

256. Hinc *quadratum diametri conjugatæ in hyperbola est æquale rectangulo, quod sub diametro transversa, cui illa ponitur conjugata, & sub ejusdem parametro comprehenditur.*

COROLLARIUM II.

257. *Quadratum vero ejusdem semidiametri conjugatæ est quarta pars rectanguli contenti sub diametro transversa, cui illa est conjugata, & sub illius parametro.*

THEOREMA X.

In hyperbola BAC, cujus axis transversus sit recta EA, ductis tangentibus verticalibus ER, AT occurrentibus tangenti laterali Rb in punctis R, T, rectangulum contentum sub tangentibus ER, AT est æquale quadranti figuræ transversi axis EA.

258. Ex puncto contactus *b* ducatur recta *b*H ordinatim axi AD applicata; rectæque directrici EH occurrens in puncto H, ex quo ad punctum
Fig. 9. F, in quo axis transversus EA a tangente laterali R*b* dividitur, ducatur
T.XV. recta HF, & ex puncto contactus *b* ad extremum E recta *b*E, nec non ex eodem per verticem A recta *b*S. quæ occurrat tangenti ER directe productæ in puncto S. Recta quoque AT occurrat rectæ *b*E in V; sitque AG parameter ipsius hyperbolæ, directrix recta EH, & subdirectrix recta M*e*.

Demonstratio.

Quoniam in triangulo HE*b* rectæ H*b*, GV sunt parallelæ (§. 22.), erit Ha. *ab* = GA. AV (§. 92.). Est autem in triangulo quoque HF*b* haud dissimili ratione Ha. *ab* = NA. AT. Ergo erit GA. AV = NA. AT (*Lib. I. §. 76.*), & *alternando*, GA. NA = AV. AT (§. 125.). Constat au-

autem, esse GA = 2 NA (§. 233.). Igitur erit etiam AV = 2AT, seu AT = TV, & ideo AV = 2TV. Rursus quoniam in triangulo S*b*E propter parallelismum rectarum SE, AV, tam recta SE est ad rectam AV, quam recta RE ad rectam TV, ut est recta E*b* ad rectam V*b* (*Lib.* IX. §. 59.), adeoque sit SE. AV = RE. TV, erit SE. RE = AV. TV (*Lib.* I. §. 125.). Est autem AV = 2TV. Ergo erit etiam SE = 2RE, seu SR = RE. Hinc rectangulum ex recta RE in rectam AT æquabit quadrantem rectanguli ex tota SE in totam AV (*Lib.* IX. §. 170.). Rectangulum porro ex SE in AV est æquale rectangulo figuræ axis transversi EA. Quandoquidem, cum triangula SAE, A*ab* sint inter se æquiangula, adeoque similia (§. 66.), erit SE. EA = *ab*, A*a* (§. 1.). Est autem H*a*. *ab* = *ab*. A*a* (§. 225.). Ergo erit SE. EA = H*a*. *ab* (*Lib.* I. §. 76.). Cumque sit etiam GA. AV = H*a*. *ab*, erit quoque SE. EA = GA. AV (§. 78.), ac propterea SE × AV = EA × GA (*Lib.* IX. §. 107.). Igitur rectangulum RE × AT sicuti est quarta pars rectanguli SE × AV, ita erit quarta pars rectanguli EA × GA (*Lib.* I. §. 112.); & ideo in hyperbola &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XI.

Si in axibus AX, EL hyperbolarum oppositarum BAC, DEF, quarum axis transversus sit recta EA, sumantur duo puncta b, a, *quæ ita distent a suo vertice A, E, ut tam rectangulum ex A*b *in E*b, *quam rectangulum ex* a*E in* a*A, sit æquale quadranti figuræ lateris transversi EA, rectæ* aC, bC *ductæ ex illis punctis* a, b *ad quodvis punctum C curvæ hyperbolicæ BAC, constituent cum recta tangente KC per illud punctum trajecta, æquales angulos KC*b, *KC*a.

259. Ex utroque vertice A, E ducantur tangentes verticales A*d*, EK, quæ tangenti laterali KC occurrant in punctis *d*, K. Ex datis vero punctis *b*, *a*, ad puncta K, *d* ipsarum tangentium verticalium agantur rectæ *b*K, *bd*, *a*K, *ad*. Fig. 1 T. XVI.

Demonstratio.

Cum rectangulum ex *a*E in A*a* ponatur æquale quadranti figuræ axis transversi EA, quemadmodum eidem quadranti est æquale rectangulum ex EK in A*d* (§. 258.), duo ista rectangula *a*E × A*a*, EK × A*d* erunt æqualia (*Syn. Alg.* §. 259.). Igitur erit *a*E. EK = A*d*. A*a* (*Lib.* IX. §. 114.). Duo autem anguli KE*a*, *a*A*d* sunt æquales inter se, utpote recti. Ergo duo triangula KE*a*, *a*A*d* erunt similia (§. 69.); & ideo æquales erunt ipsorum anguli *a*KE, A*ad*, qui proportionalibus lateribus continentur (§. 1.). Constat autem, duos angulos K*a*E, EK*a* in triangulo rectangulo KE*a* æquare unum rectum (*Lib.* V. §. 18.). Ergo etiam duo anguli K*a*E, A*ad* simul sum-

fumti unum rectum angulum æquabunt, feu angulus Kad erit rectus. Eodem modo oftendam, angulum quoque Kbd effe rectum. Si ergo circa rectam Kd, cui duo hujufmodi recti anguli incumbunt, defcribatur circulus $bRaK$, is neceffario tranfibit per quatuor puncta K, a, d, b (*Lib.* VII. §. 78.); & ideo anguli bad, bKd, utpote in eadem circuli portione pofiti, erunt inter fe æquales (§. 73.).

Ducatur modo per punctum d recta eN parallela rectæ Ka. Quoniam igitur anguli parallelarum alterni Kae, aed, nec non aKd, Kde, funt æquales (*Lib. IV.* §. 15.), ficuti etiam anguli ad verticem oppofiti KPa, ePd (*Lib.* III. §. 51.), duo triangula KPa, ePd erunt fimilia (*Lib.* IX. §. 66.); atque propterea erit $Ka . ed = KP . Pd$ (§. 67.). In triangulo autem KCa ob parallelifmum rectarum Ka, dN, habetur $Ka . dN = KC . dC$ (§ 59); & aliunde conftat, effe $KP . Pd = KC . dC$ (§. 237.). Ergo erit $Ka . ed = Ka . dN$ (*Lib.* I. §. 76.); & ideo $ed = dN$ (§. 113.). Perfpicuum porro eft, angulos ade, adN effe inter fe æquales; cum angulus adN adæquet angulum Kad (*Lib.* IV. §. 15.), quem demonftravimus rectum, & duo anguli ade, adN valeant duos rectos (*Lib.* III. §. 40); adeoque uterque angulus ade, adN fit rectus. Ergo duo triangula ead, adN ita funt æqualia, ut angulus daN angulum ead adæquet (*Lib.* V. §. 94.). Oftenfum eft autem, angulum ead effe æqualem angulo bKd. Igitur etiam angulus daN eidem angulo bKd erit æqualis (*Syn. Alg.* §. 262.). Quamobrem in directum productis rectis Kb, ad, donec fimul concurrant in puncto Q, fimulque junctis punctis Q, C recta QC, fpectari optime poteft recta QC, veluti chorda circuli $QCTK$, cui æquales anguli QKC, QaC ad illius peripheriam pofiti infiftant, videlicet, cum æquales anguli in eadem fint portione circuli (*Lib.* VII §. 73.), circulus $QCTK$ defcribi poteft circa rectam KQ, veluti diametrum, qui fimul tranfibit per puncta K, a, C, Q. Igitur angulus KCQ, utpote in femicirculo KTQ confiftens, erit rectus (§. 75.); & ideo recta QC ad perpendiculum incumbet rectæ tangenti KC; & quoniam anguli KQa, KCa in eadem circuli portione, ut patet, reperiuntur, erunt inter fe æquales (§. 73.).

Præterea, quoniam duo anguli Kbd, dbQ valent duos rectos (*Lib.* III. § 40.), & angulus Kbd jam oftenfus eft rectus, rectus erit etiam angulus dbQ. Rectus autem itidem eft angulus QCd, qui eidem infiftit rectæ dQ. Ergo circulus $bMQC$ defcriptus circa rectam dQ tranfibit per puncta d, b, Q, C (*Lib.* VII. § 78.); ac proinde anguli bQd, bCd in eadem circuli portione confiftentes, erunt inter fe æquales (§. 73.). Demonftravimus autem, æquales effe inter fe etiam angulos KQa, KCa, five bQd, dCN. Ergo duo anguli bCd, dCN, five KCb, KCa erunt inter fe æquales (*Syn. Alg.* §. 159.). Itaque fi in axibus &c. quod erat &c.

COROLLARIUM I.

260. Pofito ergo lumine in puncto a, omnes ipfius radii incidentes in curvam hyperbolicam BAC ita ex illa reflecti debent, ut, fi curvam ipfam

fam

reflexio luminis ex curva hyperbolica BAC ea constanti naturæ lege potest perfici, ut angulus reflexionis angulum incidentiæ adæquet, quin omnes radii, qui ex puncto *a* in illam curvam cadunt, per punctum *b* post reflexionem transeant, facta nimirum hypothesi, ut radii curvam ipsam hyperbolicam trajiciant. Duo idcirco puncta *a*, *b foci*, sive *umbilici* hyperbolæ BAC communiter dicuntur (§. 20.).

SCHOLION.

261. Quoniam vero radii luminis, qui ex puncto *a* incidunt in curvam superficiem hyperbolici speculi BAC, non uniuntur reipsa in puncto *b*, sed extra illam disperguntur, ut patet de radio *a*C, qui ita ex illa curva resilit, ut secundum rectam CZ vi reflexionis propagetur, posita nimirum æqualitate angulorum incidentiæ *a*CK, & reflexionis ZCV, ideo puncta *a*, *b foci* hyperbolæ non quidem *reales*, sed *imaginarii* vocantur, quatenus nempe punctum *a* objecti radiantis in speculum hyperbolicum BAC, in altero puncto *b* sui imaginem exhibet, perinde omnino ac si in puncto *b* reipsa consisteret, cujus ratio est; quia si radius reflexus CZ directe intra speculum mente producatur, puncto *b* occurrit, propter æqualitatem scilicet angulorum *a*CK, KC*b* superius ostensa, adeoque etiam angulorum KC*b*, ZCV, ex quo fit, ut lineæ ZC, C*b* sint in directum positæ (*Lib. III. §. 55.*), ac proinde radius reflexus CZ afficiat retinam oculi eodem plane modo, quo ipsam afficeret, si ex puncto *b* reipsa erumperet, nempe si objectum radians in puncto *b* reipsa haberetur, vimque suam ex illo emitteret.

COROLLARIUM II.

262. Itaque *foci*, sive *umbilici* hyperbolæ sunt *duo puncta sumta in axe, quæ ita hinc inde distant a suo vertice, ut rectangulum contentum sub correspondente abscissa, & sub recta composita ex ipsa abscissa, & ex axe transverso, sit æquale quadranti figuræ ipsius axis.*

COROLLARIUM III.

Uterque focus hyperbolæ ita distat a suo vertice, ut rectangulum contentum sub correspondente abscissa, & sub recta composita ex ipsa abscissa, & ex axe transverso sit æquale quadrato semiaxis conjugati.

263. Demonstravimus enim, quadratum semiaxis conjugati esse æquale quadranti figuræ axis transversi (§. 157.).

THEOREMA XII.

Uterque focus hyperbolæ æqualiter distat a suo vertice.

Fig. 1. T.XVI. 264. Puncta a, b sint foci hyperbolæ BAC, cujus axis transversus sit recta EA, duoque puncta E, A ejusdem vertices. Dico, distantiam foci b a vertice A æquare distantiam foci a a vertice E, seu esse $Ea = Ab$.

Demonstratio.

Cum enim rectangulum $Eb \times Ab$ adæquet rectangulum $Aa \times Ea$ (*Syn. Alg.* §. 259.), quatenus utrumque est æquale quadrato semiaxis conjugati (§. 263.), erit $Eb \cdot Aa = Ea \cdot Ab$ (*Lib. IX.* §. 114.); ac proinde $Eb \cdot Ea = Aa \cdot Ab$ (*Lib. I.* §. 125.), nec non $Eb + Ea \cdot Ea = Aa + Ab \cdot Ab$ (*Syn. Alg.* §. 256.). Ergo erit etiam $Ea = Ab$ (*Lib. I.* §. 128.). Itaque uterque focus &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Foci hyperbolæ æqualiter distant ab illius centro:

265. Ut si punctum O fuerit centrum hyperbolæ BAC, ejusque foci puncta b, a, erit $Ob = Oa$. Quandoquidem cum sit $OE = OA$ (§. 198.), & $Ab = Ea$ (§. 264.), erit etiam $OE + Ea = OA + Ab$, sive $Oa = Ob$ (*Syn. Alg.* §. 265.).

THEOREMA XIII.

In hyperbola recta linea ducta ex uno puncto extremo axis transversi ad extremum axis conjugati adæquat distantiam foci a centro.

Fig. 10. T.XV. 266. Recta EA sit axis transversus, GH axis conjugatus, & puncta b, a foci hyperbolæ BAC. Dico, rectam AH, qua extrema puncta A, H axium EA, GH simul junguntur, æquare distantiam foci b a centro O, videlicet esse $AH = bO$.

Demonstratio.

Quoniam rectangulum ex Eb in Ab est æquale quadrato semiaxis conjugati OH (§. 263.), si utrique adjiciatur quadratum semiaxis transversi OA, rectangulum ex Eb in Ab una cum quadrato semiaxis OA erit æquale quadratis semiaxium OH, OA (*Syn. Alg.* §. 266.). Rectangulum autem ex Eb in Ab adæquat rectangulum ex aA in Ab; cum sit $Ab = Ea$ (§. 264.), adeo-

adeoque Eb=Aa (*Syn. Alg.* §. 266.), & rectangulum ex aA in Ab una cum quadrato semiaxis OA est æquale quadrato rectæ Ob (§. 246.), ex eo nimirum quod sit Ob=Oa (§. 265.). Ergo etiam rectangulum ex Eb in Ab una cum quadrato semiaxis OA erit æquale quadrato rectæ Ob; atque propterea eidem quadrato rectæ Ob duo itidem quadrata rectarum OA, OH simul sumta erunt æqualia (*Syn. Alg.* §. 262.). Perspicuum porro est, quadratum rectæ AH æquare quadrata rectarum OA, OH (*Lib.* VI. §. 37.); cum angulus AOH trianguli AOH sit rectus (§. 207.). Ergo quadratum rectæ AH æquale itidem erit quadrato rectæ Ob (*Syn. Alg.* §. 262.); ac proinde rectæ AH, Oa erunt inter se æquales (*Lib.* I. §. 187.). Itaque in hyperbola &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XIV.

In hyperbola semiordinata ad axim ducta ex illius foco adaquat semiparametrum ipsius axis.

267. Ex foco a hyperbolæ BAC ducatur ad axim Aa semiordinata ab. Dico, rectam ab æquare dimidiam partem parametri AD.

Demonstratio.

Cum enim rectangulum ea ex abscissa Aa in rectam Ea compositam ex ipsa abscissa, & ex latere transverso EA ipsius hyperbolæ, sit ad quadratum ad semiordinatæ ab, ut est axis ipse transversus AE ad parametrum AD (§. 203.), & axis transversus AE sit ad parametrum AD, ut rectangulum ex DA in AE, nempe FDAE, ad quadratum GDAH ipsius parametri (*Lib.* IX. §. 99.), rectangulum ae erit ad quadratum ad, ut est rectangulum FDAE ad quadratum GDAH (*Lib.* I. §. 76.); & *alternando*, quadratum ad erit ad quadratum GDAH, ut rectangulum ae ad rectangulum FDAE (§. 125.). Rectangulum autem ae est in ratione *subquadrupla* ad rectangulum FDAE (§. 262.). Ergo etiam quadratum ad erit in ratione *subquadrupla* ad quadratum GDAH; & ideo recta ab erit in ratione *subdupla* ad parametrum AD (*Lib.* IX. §. 171.). Igitur in hyperbola &c. quod erat ostendendum. Fig. 11. T. XV.

COROLLARIUM.

268. *In omni ergo sectione conica semiordinata ad axim ducta ex illius foco adaquat dimidiam partem parametri ipsius axis.* Quod enim modo demonstravimus in hyperbola, ostensum est superius in ellipsi (§. 140.), & in parabola (§. 190.).

LEMMA II.

Si recta linea secetur utcunque, rectangulum contentum sub tota, & una parte erit æquale rectangulo comprehenso sub partibus una cum quadrato illius partis.

269. Secetur utcunque recta AB in *a*. Dico, rectangulum ex tota AB in partem A*a* esse æquale rectangulo, quod fit ex una parte B*a* in alteram A*a*, una cum quadrato ejusdem partis A*a*.

Demonstratio I.

Ponatur $AB = m$, $Aa = n$, adeoque $aB = m - n$. Erit ergo $AB \times Aa$
Fig. 11. T. XIII. $= mn$, $Aa \times aB = nm - nn$, & $\overline{Aa}^2 = nn$; ac proinde $Aa \times aB + \overline{Aa}^2 = nm - nn + nn = nm$. Igitur, cum sit $AB \times Aa = mn$, erit $AB \times Aa = Aa \times aB + \overline{Aa}^2$.

Demonstratio II.

Descripto circa totam AB semicirculo A*b*B, recta *ab* sit ipsi AB perpendicularis; puncta autem A, *b* jungantur recta A*b*, & puncta *b*, B recta B*b*. Quoniam igitur recta A*b* est media proportionalis inter totam AB, & partem A*a* (*Lib.* IX. §. 74.), rectangulum ex AB in A*a* erit æquale quadrato rectæ A*b* (§. 111.). Quadratum autem rectæ A*b* est æquale quadratis rectarum A*a*, *ab*, (*Lib.* VI. §. 37.). Ergo iisdem quadratis erit æquale etiam rectangulum ex AB in A*a* (*Syn. Alg.* §. 262.). Constat autem, quadratum rectæ *ab* esse æquale rectangulo ex A*a* in *a*B (*Lib. IX.* §. 113.); ac proinde rectangulum ex A*a* in *a*B una cum quadrato rectæ A*a* æquare quadrata simul sumta rectarum A*a*, *ab*. (*Syn. Alg.* §. 262.). Igitur rectangulum ex AB in A*a* erit itidem æquale rectangulo ex A*a* in *a*B una cum quadrato partis A*a* (§. 261.); & ideo si recta &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XV.

Focorum distantia in hyperbola est media proportionalis inter axim transversum, & rectam compositam ex ipso axe transverso, & ex parametro.

270. Puncta *a*, *m* sint foci hyperbolæ BAC, cujus axis transversus sit recta EA, parameter AK, & recta composita ex axe transverso, & ex para-
Fig. 11. T. XV. metro sit AL. Dico, rectam *am* focis interjectam esse mediam proportionalem inter axim transversum EA, & rectam AL.

De-

Demonstratio.

Quoniam rectæ xa, xm sunt æquales (§. 265.), adeoque $am = 2xa$, quadratum rectæ ma erit quadruplum quadrati rectæ xa (*Lib. IX.* §. 172.). Rectangulum autem ex EA in Aa, seu ex mA in Aa, una cum quadrato rectæ xA est æquale quadrato rectæ xa (§. 246.). Ergo quadratum rectæ ma erit quoque in ratione *quadrupla* ad rectangulum ex Ea in Aa sumtum una cum quadrato rectæ xA (*Lib.* I. §. 112.). Manifestum porro est, rectangulum ex EA in AK esse quadruplum rectanguli ex Ea in Aa (§. 262.), & quadratum rectæ EA esse quadruplum quadrati rectæ xA (*Lib.*IX.§.172.); cum sit EA $= 2x$A (§. 198.); ac proinde rectangulum ex EA in AK una cum quadrato rectæ EA esse in ratione *quadrupla* ad rectangulum ex Ea in Aa una cum quadrato rectæ xA (*Lib.* I. §. 144.). Ergo rectangulum ex EA in AK una cum quadrato rectæ EA erit æquale quadrato rectæ ma (§. 103.). Rectangulum autem ex EA, seu KL in AK, una cum quadrato rectæ EA, seu KL adæquat rectangulum ex AL in KL (§. 269.). Igitur rectangulum ex AL in KL erit æquale quadrato rectæ ma (*Syn. Alg.* §. 262.); atque propterea recta ma erit media proportionalis inter rectam KL, & rectam AL, seu inter rectas EA, AL (*Lib.* IX. §. 118.). Focorum itaque distantia &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XVI.

Si ex foco b *hyperbolæ BAC ducatur ad quodvis punctum C ipsius curvæ hyperbolicæ recta* bC, *& per punctum C recta tangens CM, cui ex centro O occurrat recta ON rectæ* bC *parallela, recta ON erit æqualis semiaxi transverso OE.*

271. Ex altero foco a agatur ad tangentem CM recta aM rectis ON, bC parallela, ductisque tangentibus verticalibus EK, Ad, ex foco a ad puncta K, N, d, C ducantur rectæ aK, aN, ad, aC, & ex vertice E ad punctum N recta EN, sicuti ex altero vertice A ad idem punctum N recta AN. Fig. 5. T. XVI.

Demonstratio.

Itaque cum anguli alterni NCb, CNO parallelarum NO, bC sint æquales (*Lib.* IV. §. 15.), sicuti etiam angulus externus ONC, & internus aMC parallelarum aM, OM (§. 14.), duo anguli NCb, NMa erunt inter se æquales (*Syn. Alg.* §. 259.). Angulus autem MCa adæquat angulum MCb (§. 259.). Ergo angulus MCa angulum quoque NMa æquabit (*Syn. Alg.* §. 261.), eruntque propterea duo latera aM, aC trianguli MaC inter se æqualia (*Lib.* V. §. 65.), seu triangulum MaC erit isosceles. Producta porro in R recta NO, perspicuum est, in triangulo baC esse aC. aR $=$ ab. aO (*Lib.* IX. §. 57.). In triangulo autem MCa itidem habetur MC. MN $=$ aC. aR. Ergo erit MC. MN $=$ ab. aO (*Lib.* I. §. 76.); ac proinde cum sit $ab = 2a$O, seu aO $=$ Ob (§.265.), erit etiam MC $=$ 2MN, seu

MN = NC. Igitur recta *a*N ad perpendiculum insistit basi MC trianguli M*a*C, seu duo anguli MN*a*, *a*NC sunt recti (*Lib.* III. §. 23.). Rectus porro est tum angulus KE*a*, tum angulus *a*A*d*; duoque anguli recti KN*a*, KE*a* incumbunt eidem rectæ K*a*, sicuti etiam duo *a*N*d*, *a*A*d* eidem rectæ *ad*. Ergo circulus KEP descriptus circa rectam K*a* transibit per quatuor puncta K, N, E, *a*, & circulus N*d*Q descriptus circa rectam *ad* per quatuor puncta *a*, N, A, *d* (*Lib.* VII. §. 78.); duoque propterea anguli *a*KE, *a*NE erunt æquales inter se, sicuti etiam duo AN*d*, A*ad* (§. 73.), quod tam illi, quam isti in eadem portione ejusdem *respective* circuli reperiantur. Demonstravimus autem §. 259. angulos *a*KE, A*ad* esse inter se æquales. Igitur etiam duo *a*NE, AN*d* inter se æquales erunt (*Syn. Alg.* §. 259.); unde, si utrique adjiciatur angulus *d*NE, totus angulus ANE toti angulo *d*N*a* erit æqualis (§. 265.). Ostensum porro est, angulum *d*N*a*, sive CN*a* esse rectum. Igitur etiam angulus ANE erit rectus; & ideo semicirculus AVE descriptus circa axim transversum EA transibit per punctum N (*Lib.* VII. §. 78.), cui cum occurrat recta ON, omnesque ejusdem circuli radii sint æquales (§. 10.), recta ON æquabit rectam, seu semiaxim transversum OE. Itaque si ex foco &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XVII.

Differentia inclinatarum ex focis ad quodvis punctum curvæ hyperbolicæ est æqualis axi ejusdem transverso.

272. Ex focis *a*, *b* curvæ hyperbolicæ BAC inclinentur ad quodvis punctum C ipsius curvæ BAC rectæ *a*C, *b*C. Dico, earum differentiam esse æqualem axi transverso EA.

Demonstratio.

Ducta namque per punctum C tangente CM, ex foco *a* agatur recta *a*M parallela rectæ *b*C, & ex centro O recta ON iisdem *a*M, *b*C parallela, quæ directe producatur in R. Quoniam igitur in triangulo MC*a* ex facta
Fig. 5. T. XVI. constructione habetur *a*M. NR = *a*C. RC (*Lib.* IX. §. 59.), sive, propter æqualitatem rectarum *a*M, *a*C in præcedenti theoremate ostensam, *a*C. NR = *a*C. RC, & in triangulo *ba*C haud dissimili ratione *b*C. OR = *ab*. *a*O, seu ob æqualitatem rectarum *a*O, O*b* (§. 263.), *b*C. OR = *ab*. O*b*, necnon *ab*. O*b* = *a*C. RC (*Lib.* IX. §. 57.), erit *a*C. NR = *b*C. OR (*Lib.* I §. 76.); & ideo *a*C — *b*C. NR — OR = *b*C. OR (§. 152.). Constat autem ex eo, quod sit *b*C. OR — *ab*. *a*O, rectam *b*C esse duplam rectæ OR, sicuti recta *ab* est dupla rectæ *a*O (§. 265.). Ergo etiam terminus *a*C — *b*C, seu differentia rectæ *a*C a recta *b*C, erit dupla differentiæ, quam habet recta NR a recta OR. Hæc autem posterior differentia est recta NO, quæ adæquat semiaxim transversum EO (§. 271.). Ergo differentia rectæ *a*C a recta *b*C erit dupla semiaxis transversi EO, seu integrum ipsum axim EA æquabit. Itaque differentia &c. quod erat ostendendum.

Co-

COROLLARIUM.

Differentia duarum rectarum inclinatarum ex focis ad unum punctum curvæ hyperbolicæ adæquat differentiam aliarum duarum inclinatarum ad aliud quodvis punctum ejusdem curvæ.

273. Si nimirum ex focis *a*, *b* hyperbolæ BAC inclinentur ad punctum *e* curvæ hyperbolicæ BAC duæ rectæ *ae*, *be*, & ad punctum aliud C duæ Fig. 5.
rectæ *a*C, *b*C, differentia duarum *ae*, *be* æquabit differentiam duarum *a*C, T. XVI.
*b*C. Utraque siquidem hujusmodi differentia est æqualis axi transverso EA. Ergo sunt inter se æquales (*Syn. Alg.* §. 259.).

THEOREMA XVIII.

Si in recta linea tangente hyperbolam in vertice sumantur hinc inde a vertice partes æquales, quarum utraque sit æqualis semidiametro conjugatæ; tum ex centro per illarum partium extrema ducantur rectæ lineæ, hæ ad curvam hyperbolicam in infinitum abeuntem semper propius accedent, si in infinitum productæ fuerint, nunquam vero eum illa convenient.

274. Per verticem A hyperbolæ BAC, cujus diameter transversa sit recta AG, & parameter recta A*m*, ducatur tangens DE, in qua hinc inde Fig. 6.
ab ipso vertice A sumtis partibus AD, DE, quæ sint æquales semidiame- T. XVI.
tro conjugatæ FV, ex centro F per extrema ipsarum rectarum puncta D, E agantur rectæ FL, FM. Dico, rectas FL, FM, quantumvis directe producantur, numquam convenire posse cum hyperbolica curva BAC in infinitum abeunte, etsi ad eam continuo propius accedant.

Demonstratio.

Ducatur ordinata quæcunque *ae*, quæ hinc inde usque ad ipsas rectas FL, FM producatur, & quoniam in triangulo *b*F*d* rectæ DE, *bd* sunt parallelæ (§. 22.), erit *b*N. N*d* $=$ DA. AE (§. 92.); atque propterea, sicuti habetur DA $=$ AE, ita erit *b*N $=$ N*d* (*Lib.* I. §. 45.). Similiter in triangulo *b*FN cum sit *b*N. NF $=$ DA. AF (*Lib.* IX. §. 60.), quadratum rectæ *b*N erit ad quadratum rectæ NF, ut quadratum rectæ DA ad quadratum rectæ AF (*Lib.* I. §. 188.). Quadratum autem rectæ DA est ad quadratum rectæ AF, ut est rectangulum ex parametro *m*A in diametrum transversam AG ad quadratum ipsius diametri AG; cum eadem sit ratio *subquadrupla* tum quadrati rectæ DA ad rectangulum ex *m*A in AG (§. 209.), tum quadrati rectæ AF ad quadratum rectæ GA (*Lib.* IX. §. 172.). Ergo quadratum quoque rectæ *b*N erit ad quadratum rectæ NF, ut rectangulum ex *m*A in AG ad

quadratum rectæ AG (*Lib.* I. §. 77.); & quoniam rectangulum ex *m* A in AG est ad quadratum rectæ AG, ut parameter *m*A ad diametrum ipsam transversam AG (*Lib.* IX. §. 100.), scilicet ut altitudines, quadratum rectæ *b*N erit ad quadratum rectæ NF, ut parameter *m*A ad diametrum transversam AG (*Lib.* I. §. 78.). Perspicuum porro est, quadratum quoque semiordinatæ *a*N esse ad rectangulum ex GN in AN, ut parameter *m*A ad diametrum transversam AG (§. 203.). Igitur quadratum rectæ *b*N erit ad quadratum rectæ NF, ut quadratum semiordinatæ *a*N ad rectangulum ex GN in AN (*Lib.* I. §. 76.). Quadratum autem rectæ *b*N adæquat rectangulum ex *ba* in *ad* una cum quadrato rectæ *a*N (§. 246.); cum jam sit *b*N =N*d*, & quadratum rectæ NF adæquat rectangulum ex GN in AN una cum quadrato rectæ FA (*ibidem*), propterea quod sit AF=FG (§. 198.). Ergo, cum quadratum rectæ *b*N sit ad quadratum rectæ NF, ut quadratum rectæ *a*N ad rectangulum ex GN in AN, ut supra demonstravimus, his *respective* detractis, residuum rectangulum ex *ba* in *ad* erit ad residuum quadratum rectæ AF, ut est quadratum rectæ *b*N ad quadratum rectæ NF (*Lib.* I. §. 149.). Ostensum porro est, quadratum rectæ DA esse ad quadratum rectæ AF, ut quadratum rectæ *b*N ad quadratum rectæ NF. Igitur rectangulum ex *ba* in *ad* erit ad quadratum rectæ AF, ut est quadratum rectæ DA ad idem quadratum rectæ AF (§. 77.); quapropter rectangulum ex *ba* in *ad* erit æquale quadrato rectæ DA (§. 103.); & ideo habebitur *ad*. DA=DA. *ba* (*Lib.* IX. §. 118.). Hinc, cum recta *ad* semper excedat rectam DA, ut patet, etiam recta DA semper major erit recta *ba* (*Lib.* I. §. 45.); & ideo, cum in infinitum abeunte curva hyperbolica BAC, continuo magis ac magis augeatur recta *ad* supra rectam constantem DA, ita recta DA majorem semper atque majorem habere debet rationem supra rectam *ba*, seu recta *ba* debet in infinitum decrescere, quin unquam evanescat, ne scilicet evanescat rectangulum, quod semper fieri debet ex ipsa recta *ad* in rectam *ba*, quæ inter curvam hyperbolicam B*a*A, & rectam FL reperitur, quadrato rectæ DA perpetuo æquale. Itaque si in recta linea &c. quod erat ostendendum.

DEFINITIO XVI.

275. Rectæ FL, FM, quæ licet in infinitum directe producantur, nunquam convenire possunt cum hyperbolica curva BAC, quamvis & ipsa quoque in infinitum abeat, ipsæque rectæ FL, FM continuo ad ipsam curvam propius semper accedant, *asymptoti* hyperbolæ BAC vocantur.

COROLLARIUM I.

276. Si *asymptoti* FL, FM directe ultra centrum F producantur in S, R, rectæ FS, FR erunt *asymptoti* hyperbolæ HGK priori BAC oppositæ. Quandoquidem, ducta per verticem G tangente PQ parallela tangenti DE, cum anguli DFA, GFQ ad verticem sint æquales (*Lib.* III. §. 51.), sicuti etiam angu-

anguli parallelarum alterni FAD, FGQ, & FDA, FQG (*Lib. IV. §. 15.*), duo triangula DAF, GFQ, utpote æquiangula, erunt similia (*Lib. IX. §. 66.*), & latera FA, FG * DA, GQ homologa (§. 67.). Igitur erit DA. GQ = FA. FG (§. 77.). Est autem FA = FG (§. 198.). Ergo erit etiam DA = GQ (*Lib. I. §. 45.*). Eandemque ob causam habebitur etiam AE = PG. Quamobrem cum sit DA = AE, erit etiam PG. GQ (*Syn. Alg. §. 265.*), & recta PG, sicuti etiam GQ, æquabit semidiametrum conjugatam VF. Igitur, cum hyperbolæ BAC, HGK sint similes, & æquales, qua ratione rectæ FL, FM sunt *asymptoti* hyperbolæ BAC, eadem ratione rectæ FR, FS erunt *asymptoti* hyperbolæ oppositæ HGK.

Corollarium II.

277. Quævis recta ducta intra angulum AFM, ut *xy*, parallela *asymptoto* FM, si in directum producatur, occurrit tandem curvæ hyperbolicæ BAC. Etenim, cum spatium inter parallelas FM, *xy* idem semper maneat, illud vero continuo decrescat, quod curva AeC, & *asymptoto* FM continetur, necesse est, ut hujusmodi spatia tandem evadant æqualia, ac proinde recta *xy* curvæ AeC tandem occurrat.

Corollarium III.

278. Quælibet alia recta linea ducta ex centro F, ut Fz, Fn, si directe producatur, vel hyperbolam HGK tandem secat, vel ab illa continuo remotior efficitur. Recta siquidem Fz, quo magis producitur, eo magis recedit ab *asymptoto* FR in spatio omnino extraneo. At vero recta Fn magis quidem semper recedit ab *asymptoto* FR, sed cum continuo minuatur spatium, *asymptoto* FR, & curva hyperbolica HG comprehensum, consectarium est, ut recta Fn curvæ HG tandem occurrat, eamque dispescat.

Corollarium IV.

279. Hinc *asymptoti* hyperbolæ HGK non sunt nisi rectæ FR, FS; ut proinde *unius hyperbolæ unicæ sint asymptoti*.

Corollarium V.

280. Segmenta *ba*, *ed* rectæ *bd*, *asymptotis* FL, FM, & curvæ hyperbolicæ BAC interjecta, sunt æqualia. Cum enim sit *b*N. N*d* = DA. AE (§. 92.), sicuti est DA = AE, ita erit *b*N = N*d* (*Lib. I. §. 45.*). Est autem *a*N = N*e* (§. 12.). Ergo erit etiam *ba* = *ed* (*Syn. Alg. §. 266.*). Eadem ratione perspicuum fiet, esse itidem LB = CM.

Co-

Corollarium VI.

281. Rectangulum ex *ba* in *ad* adæquat rectangulum ex *ed* in *be*. Sicuti enim rectangulum ex *ba* in *ad* est æquale quadrato rectæ DA, ita rectangulum ex *ed* in *be* est æquale quadrato rectæ AE. Quadrata autem rectarum DA, AE sunt æqualia (*Lib.* I. §. 187.). Ergo etiam rectangula *ba* ⋊ *ad*, *ed* ⋊ *be* erunt æqualia (*Syn. Alg.* §. 259.).

Corollarium VII.

282. Rectangulum quoque ex *ba* in *ad* est æquale rectangulo ex LB in BM, si recta LM parallela itidem fuerit eidem tangenti DE. Utrumque enim horum rectangulorum est æquale quadrato rectæ DA.

Corollarium VIII.

283. Hinc erit *ba*. LB = BM. *ad* (*Lib. IX.* §. 114.). Unde sicuti recta BM in recessu a vertice A magis ac magis magnitudine superat rectam *ad*, ita recta *ba* magis ac magis in ejusmodi recessu excedit rectam LB, seu recta LB continuo minuitur.

Corollarium IX.

284. Si hyperbola BAC fuerit æquilatera, nempe si parameter A*m* fuerit æqualis lateri transverso GA, *asymptoti* FL, FM angulum rectum LFM comprehendent. Cum enim, hac stante hypothesi, rectangulum ex GA in A*m* non sit diversum a quadrato ipsius lateris transversi GA, quadrata rectarum DA, AF erunt in ratione subquadrupla ad idem quadratum; adeoque erunt æqualia (*Lib.* I. §. 103.). Igitur etiam rectæ DA, AF erunt æquales (§. 187.). Rectus autem est angulus DAF (§. 24.). Ergo reliqui duo anguli AFD, ADF trianguli DAF erunt uni recto æquales (*Lib.* V. §. 47.). Sunt autem æquales inter se (§. 60.). Igitur uterque erit medietas unius anguli recti. Eodem modo ostendam, etiam angulum AFE æquare dimidiam partem unius anguli recti. Igitur angulus LFM est rectus.

Corollarium X.

285. Si per quodvis punctum *a* curvæ hyperbolicæ BAC ducatur tangens FH, quæ occurrat *asymptotis* GD, GL, ipsa FH bifariam secta erit
Fig. 7. in *a* a diametro GM per illud punctum traducta. Etenim, si secus, vel re-
T.XVI. ctæ GD, GL non essent *asymptoti* hyperbolæ BAC; cum, posita inæqualitate ipsarum *a*F, *a*H, alterutrum quadratorum rectarum *a*F, *a*H tunc non sit æquale quadrato semidiametri conjugatæ, & sic alterutra rectarum GD, GL non est *asymptotus*; vel utrumque eorundem quadratorum esset eidem

qua-

quadratò conjugatæ semidiametri inæquale; ac propterea neutra rectarum GD, GL est *asymptotus* curvæ hyperbolicæ BAC contra hypothesim. Rectæ igitur *a*F, *a*H sunt æquales inter se, & quadratum utriusque est æquale quadrato semidiametri diametro G*a* conjugatæ.

Corollarium XI.

286. Ductis quoque ordinatis *bm*, *dn*, ipsisque ad *asymptotos* usque productis, segmenta E*b*, *m*K, sicuti etiam segmenta D*d*, *n*L, erunt æqualia. Patet ex §. 280.

Corollarium XII.

287. Rectangulum ex E*b* in *b*K est æquale quadrato rectæ *a*F. Ostenditur eodem modo, quo demonstratum est ipsum theorema.

Corollarium XIII.

288. Rectangulum ex E*b* in *b*K adæquat rectangulum ex K*m* in *m*E. Similiter idem rectangulum ex E*b* in *b*K est æquale rectangulo ex D*d* in *d*L; atque propterea habetur E*b*. D*d* = *d*L. *b*K. Manifestum est quoad omnes partes ex §§. 281. 282. 283. Eædem quippe demonstrationes hic quoque locum habent.

Theorema XIX.

Si per puncta, in quibus duæ rectæ parallelæ hyperbolam secant, ducantur rectæ, quæ occurrant asymptotis, & sint illis parallelæ, hujusmodi rectæ erunt proportionales.

289. Hyperbolam BAC secent duæ rectæ parallelæ *ab*, BC in punctis *a*, *b*, B, C, ex quibus ad *asymptotos* DG, DL ducantur rectæ *a*E, BF parallelæ *asymptoto* DL, & rectæ *b*H, CK parallelæ *asymptoto* DG. Dico, rectas CK, *b*H, BF, *a*E esse inter se proportionales, videlicet esse CK. *b*H = BF. *a*E. Fig. 8. T.XVI.

Demonstratio.

Rectæ *ab*, BC producantur in directum, donec *asymptotis* occurrant. Cum igitur in triangulo GDL recta CK posita sit parallela rectæ GD, erit CK. KL = GD. DL (*Lib. IX. §. 60.*). Est autem haud dissimili ratione etiam GF. FB = GD. DL. Ergo erit CK. KL = GF. FB (*Lib. I. §. 76.*). Eodem modo ostendam, esse *b*H. H*d* = *e*E. E*a*, quatenus nempe utraque istarum rationum est illi æqualis, quam habet in triangulo *e*D*d* latus *e*D ad latus D*d*. Constat autem, esse GD. DL = *e*D. D*d* (*Lib. IX. §. 58.*); cum recta

ed

ed posita sit parallela rectæ GL. Igitur erit CK . KL $=$ *b*H . H*d*, *b*H . H*d* $=$ GF . FB, GF . FB $=$ *e*E . E*a*, sive CK . KL $=$ *b*H . H*d* $=$ GF . FB $=$ *e*E . E*a* (*Lib.* I. §. 76.); & ideo CK . *b*H $=$ KL . H*d* $=$ *b*H . GF $=$ H*d* . FB $=$ GF . *e*E $=$ FB . E*a* (§. 125.); ac proinde CK . *b*H $=$ FB . E*a* (§. 76.). Ergo, si per puncta &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XX.

Si linea hyperbolam secans asymptotis occurrat, & per puncta sectionum ducantur rectæ asymptotis parallelæ, parallelogramma, quæ hinc fiunt, erunt æqualia.

290. Recta BC secet hyperbolam BAC, ejusque *asymptotis* DE, DG occurrat in punctis E, G. Ductis autem ex punctis B, C rectis BK, BF, CH, CL, quæ sint *asymptotis* parallelæ, fiant parallelogramma KBFD, CLDH. Dico, ista parallelogramma esse æqualia.

Fig. 1. Tab 18.

Demonstratio.

Quoniam rectæ EB, CG sunt æquales (§. 286.), si utrique adjiciatur recta BC, erit EC $=$ BG (*Syn. Alg* §. 265.); ac proinde EC . EB $=$ BG . CG (*Lib.* I. §. 102.). Perspicuum est autem, ob parallelismum rectarum KB, LC in triangulo LEC, esse LC . KB $=$ EC . EB (*Lib. IX.* §. 59.), & in triangulo BGF haud dissimili ratione haberi BF . CH $=$ BG . CG. Ergo erit LC . KB $=$ BF . CH (*Lib. I.* §. 76.); & ideo KB $\times$ BF $=$ LC $\times$ CH, sive KBFD $=$ CLDH (*Lib.* IX. §. 107.). Igitur si linea &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

291. Etiam parallelogramma BKDF, *bae*D, quæ eodem modo fiunt ad eandem partem hyperbolæ, sunt æqualia. Quandoquidem, si jungantur puncta *a*, C recta *a*C, duo parallelogramma *bae*D, LCHD erunt æqualia. Sunt autem æqualia etiam duo KBFD, LCHD. Ergo duo quoque BKDF, *bae*D sunt æqualia (*Syn. Alg.* §. 259.).

COROLLARIUM II.

292. Ductis rectis BD, *a*D, CD, triangula BDK, *a*D*b*, CDH sunt inter se æqualia. Sunt enim pars dimidia parallelogrammorum æqualium (*Lib. I.* §. 126. & §. 45.).

COROLLARIUM III.

293. Si uni *asymptoto* DG ex punctis C, *a*, B sumtis in curva hyperbolica BAC agantur rectæ parallelæ CL, *ab*, BK, quæ alteri *asymptoto* DE

occur-

DE occurrant, erit KB. $ba = Db$. DK, ficuti etiam KB. LC = DL. DK, nec non ba. LC = DL. Db. Etenim conftitutis rectangulis KBFD, baeD, LCHD, cum duo KBFD, baeD fint æqualia (§. 291.), erunt latera eorum reciproce proportionalia (*Lib.* IX. §. 115.). Ergo erit KB. $ba = Db$. DK. Eodem modo perfpicuum fiet, effe KB. LC = DL. DK, nec non ba. LC = DL. Db.

COROLLARIUM IV.

294. Si *afymptoto* AH agantur duæ rectæ parallelæ CF, DE, & ex puncto, feu apice A anguli MAH per punctum F ducatur recta AL, cui occurrat recta DE directe producta, recte DE, CF, DL erunt continuè proportionales. Cum enim fit DE. CF = AC. AD (§. 293), & AC. AD = CF. DL (*Lib.* IX. §. 59.), erit ∺ DE. CF. DL (*Lib.* I. §. 76.). Fig. 2. Tab. 18.

COROLLARIUM V.

295. Si *afymptotus* AM proportionaliter dividatur in punctis B, C, D ita nimirum ut fit AB. AC = AC. AD, ductis ex punctis B, C, D ad curvam hyperbolicam EFG rectis BG, CF, DE, quæ fint parallelæ alteri *afymptoto* AH, erit quoque DE. CF = CF. BG. Quandoquidem, cum fit CF. BG = AB. AC, & DE. CF = AC. AD (§. 293.), profecto, ftante hypothefi, erit DE. CF = CF. BG (*Lib.* I. §. 76.). Fig. 2. Tab. 18.

THEOREMA XXI.

Si una hyperbolæ afymptotus proportionaliter dividatur, & ex punctis hujufce divifionis ducantur ad curvam hyperbolicam rectæ lineæ alteri afymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica hifce rectis determinata, erunt æqualia.

296. *Afymptotus* DE hyperbolæ BAG proportionaliter dividatur in punctis G, H, T, ita nimirum ut fit DG. DH = DH. DT, & ex ipfis punctis G, H, T ad curvam hyperbolicam BAC ducantur rectæ GA, HK, TC parallelæ alteri *afymptoto* DF. Dico, trapezia hyperbolica GAKH, HKCT effe inter fe æqualia. Fig. 3. Tab. 18.

Demonftratio.

Ex punctis A, K, C ducantur ad alteram *afymptotum* DF rectæ AL, KM, CN parallelæ *afymptoto* DE. Tum rectæ CT, AL in directum productæ concurrant in puncto R. Quoniam igitur habetur KH. CT = DT. DH (§. 293.), & per hypothefim DT. DH = DH. DG, erit quoque KH. CT = DH. DG (*Lib.* I. §. 76.). Eft autem KH = MD, & CT = ND (*Lib.* VI. §. 20.), ac proinde MD. ND = KH. CT. Ergo erit MD. ND = DH. DG (*Lib.*

(*Lib.* I. §. 77.), & *alternando*, MD. DH = ND. DG (*Ibid.* §. 125.). Ergo duo parallelogramma NaGD, MKHD sunt similia (*Lib.* IX. §. 1.). Eodem modo perspicuum itidem fiet, similia esse inter se etiam duo parallelogramma LRTD, MKHD; atque propterea tria parallelogramma LRTD, MDHK, NaGD esse similia. Quamobrem, tria hujusmodi parallelogramma posita erunt circa eandem diametrum (*Lib.* IX. §. 85.), seu recta ducta ex puncto D ad punctum R transibit per puncta *a*, K, & ducta altera diametro AC in parallelogrammo *a*ARC, hæc bifariam divisa erit in puncto *m* a diametro *a*R, & ideo sectum quoque erit bifariam segmentum hyperbolicum AKC*m*A a recta DR (§. 249.). Si ergo ex puncto D ad extrema puncta A, C agantur rectæ DA, DC, cum duo triangula AD*m*, CD*m* sint æqualia (*Lib.* IX. §. 93.), demtis spatiis hyperbolicis AK*m*, *m*KC, reliquum spatium ADK erit æquale reliquo spatio KDC (*Syn. Alg.* §. 266.). Manifestum porro est, triangula ADG, KDH esse inter se æqualia (*Lib.* I. §. 103.); cum sint pars dimidia (*Lib.* VI. §. 21.) parallelogrammorum æqualium LAGD, MKHD (§. 291.). Igitur, sublato communi triangulo *a*GD, reliquum triangulum A*a*D erit æquale reliquo trapezio K*a*GH (*Syn. Al.* §. 266.); his vero addito spatio AK*a*, triangulum hyperbolicum ADK æquabit trapezium hyperbolicum AKHG (*Ibid.* §. 265.). Similiter quoniam triangulum CDT adæquat triangulum KDH, utpote quæ sunt partes dimidiæ parallelogrammorum æqualium CNDT, KHDM, demto utrique communi triangulo *e*DH, reliquum triangulum KD*e* erit æquale trapezio residuo *e*CTH; his autem addito spatio K*e*C, trapezium hyperbolicum KCTH æquabit triangulum hyperbolicum KDC. Igitur sicuti trapezium AKHG adæquat triangulum ADK, ita trapezium KCTH adæquat triangulum KDC. Demonstravimus autem, duo triangula ADK, KDC esse inter se æqualia. Ergo etiam duo trapezia AKHG, KCTH erunt inter se æqualia (§. 259.).

Corollarium I.

297. Si *asymptotus* BA hyperbolæ GD ita dividatur in punctis M, L, H, A, ut sit BM. BL = BH. BA, ductis ad curvam hyperbolicam ordinatis MD, LE, HF, AG parallelis alteri *asymptoto* BC, trapezia hyperbolica LMDE, AHFG erunt æqualia. Posita namque recta B*a* media proportionali inter segmenta BL, BH, & ducta recta *ab*, cum ex hypothesi habeatur BM. BL = BH. BA, rectangulum ex BM in BA erit æquale rectangulo ex BL in BH (*Lib.* IX. §. 107.). Rectangulum autem ex BL in BH est æquale quadrato rectæ B*a* (§. 111.). Ergo etiam rectangulum ex BM in BA erit eidem quadrato rectæ B*a* æquale (*Syn. Alg.* §. 262.); ac proinde erit BM. B*a* = B*a*. BA (*Lib.* XI. §. 118.), sicuti est BL. B*a* = B*a*. BH. Igitur trapezium hyperbolicum M*ab*D æquabit trapezium hyperbolicum A*ab*G (§. 296.). Trapezium autem *a*LE*b* est eandem quoque ob causam trapezio H*ab*F æquale. Ergo, his sublatis, reliquum trapezium LMDE æquabit reliquum trapezium AHFG (*Syn. Alg.* §. 266.).

Fig. 17. Tab. 17.

Co-

Corollarium II.

298. Etiam triangula EBD, GBF sunt æqualia. Etenim, si jungantur puncta B, b recta Bb, triangulum bBD erit æquale triangulo GBb, & triangulum bBE trangulo FBb, ut patet ex demonstratione theorematis. Ergo, demtis æqualibus bBE, FBb, etiam reliquum EBD reliquo GBF erit æquale (*Ibid.*).

Corollarium III.

299. Si rectæ BM, BL, BH, BA fuerint continuo inter se proportionales, trapezia LMDE, HLEF, AHFG erunt æqualia. Sunt enim tam duo LMDE, HLEF, quam duo HLEF, AHFG inter se æqualia (§. 297.).

Corollarium IV.

300. Posita proportione continua rectarum BM, BL, BH, BA, etiam triangula EBD, FBE, GBF erunt æqualia (§. 298.).

Corollarium V.

301. Hinc, si *asymptotus* BA in infinitum producta ea ratione dividatur, ut partes BM, BL, BH, BA &c. crescant secundum progressionem Geometricam, tam trapezia LMDE, HMDF, AMDG &c. quam triangula EBD, FBD, GBD &c. progressionem Arithmeticam crescentem; rectæ vero MD, LE, HF, AG &c. progressionem Geometricam decrescentem exhibebunt. Est enim AG . HF = BH . BA, & HF . LE = BL . BH &c. (§. 293.).

Corollarium VI.

302. Cum divisio *asymptoti* BA directe in infinitum productæ, possit in infinitum continuari, determinari poterunt in spatio, quod *asymptoto* BA, & curva hyperbolica DG continetur, infinita trapezia trapezio LMDE æqualia. Asymptoticum propterea ejusmodi spatium infinitum vocant Geometræ.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER XVI.

De figuris isoperimetris.

De *figuris isoperimetris* agit Pappus lib. V. *Collect. Mathematicarum*, & Clavius tum in *Commentariis* super cap. I. Sphæræ Joannis de Sacro Bosco, tum lib. VII. *Geometriæ Practicæ*. Quæ igitur hac de re scitu magis digna nobis visa sunt, hic exhibemus.

DEFINITIO.

1 *Figuræ isoperimetræ dicuntur illæ, quarum perimetri, sive ambitus sunt inter se æquales*. Ut si tria latera trianguli ABC æqualia fuerint quatuor lateribus quadrilateri ABCD, duo hujusmodi plana rectilinea erunt Fig. 2. sibi mutuo *isoperimetra*. Idipsum dicito de solidis, videlicet ea esse *isope-* Fig. 1. *rimetra*, quæ æqualibus superficiebus continentur, quamtumvis genere di- Tab. 17. versa inter se mutuo illa fuerint.

THEOREMA I.

Triangulorum isoperimetrorum eandem basim habentium, quod est isosceles, majorem habet aream.

2. Super eandem basim AC descripta habeantur duo triangula *isoperime-* Fig. 3. *tra* ABC, ADC, quorum ABC sit isosceles. Dico, aream trianguli ABC Tab. 17. esse majorem area trianguli ADC.

Demonstratio.

Latere AB in directum producto, sumatur segmentum BF æquale lateri AB, atque adeo etiam lateri BC, & jungantur puncta D, F recta DF, Fig. 3. & puncta B, D recta BD. Quoniam igitur duo latera AD, DF majora sunt Tab. 17. reliquo AF (*Lib.* V. §.69.), cui duo AB, BC posita sunt æqualia, duo latera AD, DF majora erunt duobus AB, BC. Duo autem latera AD, DC sunt ex hypothesi æqualia duobus AB, BC. Ergo duo AD, DF duobus quoque AD, DC erunt majora (*Syn. Alg.* §.264.); sublatoque idcirco communi AD, reliquum DF majus erit reliquo DC (*Ibid.* §.269.). Itaque basis DF trianguli DBF excedit basim DC trianguli DBC. Duo autem ista triangula habent latera

BF,

BF, BC æqualia, & latus BD est utrique commune. Ergo angulus FBD erit major angulo DBC (*Lib.* V. §. 96.); ac proinde recta DB bifariam non dividit angulum FBC. Ducta propterea recta BE, quæ angulum ipsum FBC bifariam dividat, illa necessario cadet supra rectam BD, utpote constituens angulum EBC majorem angulo DBC. Hisce positis, cum angulus FBC sit duplus anguli BCA, utpote æqualis duobus BCA, BAC (§ 50.), qui sunt æquales (§. 60.), nequit angulus EBC esse una pars dimidia anguli FBC, quin sit æqualis angulo BCA (*Lib.* I. §. 113.). Duo autem hujusmodi anguli EBC, BCA sunt alterni, producti a recta BC incidente in rectas BE, AC. Ergo rectæ BE, AC sunt parallelæ (*Lib.* IV. §. 12.). Quamobrem directe producto latere AD in E, junctisque punctis E, C recta EC, triangulum ABC erit æquale triangulo AEC (*Lib.* VI. . 32.). Triangulum autem AEC est majus triangulo ADC (*Syn. Alg.* §. 257.). Ergo triangulum quoque ABC est majus triangulo ADC (§. 264.). Triangulorum itaque &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Area trianguli regularis excedit aream trianguli irregularis isoperimetri super eandem basim constituti.

3. Omne enim triangulum regulare est isosceles (*Lib.* V. §. 16.).

THEOREMA II.

Area rectanguli super dimidiatam basim trianguli isosceles constituti, eique isoperimetri, est major area ipsius trianguli.

4. Super partem dimidiam DC basis AC trianguli isoscelis ABC constitutum habeatur rectangulum DFEC ipsi triangulo *isoperimetrum*. **Dico**, aream rectanguli DFEC esse majorem area trianguli ABC.

Demonstratio.

Super eandem partem DC concipiatur rectangulum BDCG ejusdem altitudinis BD cum ipso triangulo ABC. Itaque cum latera DC, BG sint æqualia (*Lib.* VI. §. 20.), duo BG, DC æqualia erunt basi AC. Eadem ratione æqualia erunt eidem basi AC duo latera DC, FE rectanguli DFEC; ac proinde reliqua duo ejusdem rectanguli latera DF, CE erunt æqualia duobus lateribus AB, BC ipsius trianguli ABC (§. 1.); cumque tam duo AB, BC (*Lib.* V. § 25.), quam duo DF, CE sint æqualia inter se (*Lib.* VI. §. 20), latus CE æquabit latus BC. Latus autem BC est majus latere GC (*Lib.* V. §. 55.), utpote oppositum angulo recto BGC in triangulo BGC, ac proinde angulo majori, quam sit angulus GBC, cui opponitur latus GC, qui est acutus (§. 44.). Ergo latus quoque CE erit majus latere GC (*Syn. Alg.* §. 264). Fig. 4. Tab. 17.

Duo autem rectangula DE, DG ejusdem basis sunt inter se, ut altitudines CE, CG (*Lib.* IX. *§.* 100.). Igitur rectangulum DE erit majus rectangulo DG. Manifestum porro est, triangulum ABC æquare rectangulum BDCG (§. 97.). Ergo rectangulum DE majus quoque erit triangulo ABC (*Syn. Alg.* §. 264.). Itaque area rectanguli &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA III.

Area quadrati excedit aream cujuslibet parallelogrammi illi isoperimetri.

I.

Fig. 6. Tab. 17. 5. Rectangulum EBGF sit *isoperimetrum* quadrato ABCD, nimirum duo latera BG, GF rectanguli simul sumta sint æqualia duobus lateribus BC, CD quadrati, quemadmodum & reliqua duo FE, EB reliquis duobus DA, AB. Dico, aream quadrati esse majorem area rectanguli EBGF.

Demonstratio.

Latus FG ponatur una pars dimidia lateris DC, ut proinde latus DC sit *duplum* lateris FG. Super rectam autem *bd* duplam lateris BC constitutum habeatur rectangulum *ad*, cujus altitudo *cd* sit in ratione *subdupla* ad altitudinem, sive ad latus DC, atque adeo æqualis altitudini FG rectanguli EBGF. Quoniam igitur ex hypothesi habetur $bd = BC + CD$, & $BG = BC + CD - FG$, basis *bd* rectanguli *ad* erit major basi BG rectanguli EG. Horum autem rectangulorum altitudines FG, *cd* positæ sunt æquales. Ergo rectangulum *ad* est majus rectangulo EG (*Lib.* IX §. 98.). Quadratum autem ABCD adæquat rectangulum *ad* (§. 109.); cum positum sit $bd \cdot BC = DC \cdot cd$. Igitur quadratum quoque ABCD est majus rectangulo EBGF (*Syn. Alg.* §. 264.).

I I.

Fig. 5. Tab. 17. 6. Super latus BC quadrati ABCD constitutus sit rombus EBCF ipsi quadrato *isoperimeter*. Dico, aream quadrati ABCD excedere aream ipsius rombi.

Demonstratio.

Directe producta basi BC in G, demissaque ex vertice F perpendiculari FG, cum in triangulo CFG angulus CGF sit rectus (*Lib.* III. §. 23.), adeoque major angulo FCG, qui est acutus (*Lib.* V. §. 44.), latus FC erit majus latere, sive altitudine FG (§. 53.). Est autem $DC = CF$. Ergo latus

tus quoque DC, sive altitudo quadrati ABCD excedit altitudinem FG parallelogrammi EBCF. Quadratum autem ABCD est ad rombum EBCF, ut altitudo DC ad altitudinem FG (*Lib.* IX. §. 103.). Ergo quadratum ABCD est majus rombo EBCF.

III.

7. Esto romboides *m*BG*n* *isoperimetra* quadrato ABCD. Dico, aream quadrati ABCD excedere aream romboidis *m*BG*n*. Fig. 6. Tab. 17.

Demonstratio.

Super eandem basim BG constitutum sit rectangulum EBGF romboidi *m*BG*n*, adeoque etiam quadrato ABCD, *isoperimetrum*. Ex demonstratione §. 6. manifestum est, aream rectanguli EBGF majorem esse area romboidis *m*BG*n*. Area autem quadrati ABCD excedit aream rectanguli EBGF (§. 5.). Ergo area ipsius quadrati major itidem erit area romboidis *m*BG*n*. Itaque area quadrati &c. quod erat ostendendum.

Corollarium.

8. Ex demonstratione §. 6. ad evidentiam colligitur, *aream rectanguli excedere aream cujuslibet parallelogrammi obliquanguli super eandem basim constituti, atque ipsi rectangulo isoperimetri.*

Lemma I.

Si in triangulo rectangulo ab uno acutorum angulorum ad latus oppositum recta utcunque ducatur, major erit proportio hujus lateris ad segmentum, quod est prope angulum rectum, quam totius anguli ad angulum illi segmento correspondentem.

9. In triangulo rectangulo ABC ab angulo acuto ACB ad oppositum latus AB ducatur utcunque recta CD. Dico, rectam, sive latus AB habere majorem proportionem ad segmentum DB, quam angulus ACB ad angulum DCB. Fig. 11. Tab. 17.

Demonstratio.

Quoniam angulus DBC, utpote rectus, est major angulo CDB, & angulus ADC, utpote obtusus (*Lib.* V. §. 44.), excedit angulum CBD (§. 51.), latus CD erit majus latere CB, & latus CA latere CD (§. 53.). Quamobrem

obrem, si intervallo CD ex centro C describatur arcus EF, is secabit latus CA supra punctum A in E, & latus CB directe infra B productum in puncto F; eritque propterea ratio trianguli ACD ad sectorem ECD *majoris inaequalitatis* (*Lib. I. §. 16.*); *minoris* vero *inaequalitatis* ratio trianguli DCB ad sectorem DCF (*Ibid.*); ac proinde ratio trianguli ACD ad sectorem ECD erit major ratione trianguli DCB ad sectorem DCF (*Ibid. §. 40.*). Igitur *alternando*, major quoque erit ratio trianguli ACD ad triangulum DCB, quam sectoris ECD ad sectorem DCF (*Ibid. §. 129.*); & *componendo*, triangulum ACB habet majorem rationem ad triangulum DCB, quam sector ECF ad sectorem DCF (§. 133.). Ut autem sector ECF ad sectorem DCF, ita est angulus ECF ad angulum DCF (*Lib. IX. §. 163.*). Ergo triangulum ACB habebit majorem rationem ad triangulum DCB, quam angulus ECF, sive ACB ad angulum DCF, sive DCB. Constat autem, basim AB esse ad basim DB, ut est triangulum ACB ad triangulum DCB (*Ibid. §. 99.*). Ergo ratio quoque basis AB ad basim DB erit major ratione anguli ACB ad angulum DCB. Si ergo in triangulo &c. quod erat. &c.

S C H O L I O N.

10. Idipsum eodem modo demonstrabitur, si angulus ABC trianguli ACB fuerit obtusus, & universaliter, si angulus CBA major fuerit angulo CAB.

L E M M A I I.

Isoperimetrarum figurarum rectilinearum regularium illa majorem habet catetum, quae pluribus lateribus comprehenditur.

Fig. 7. Fig. 8. Tab. 17. 11. Sint duae figurae regulares *isoperimetrae* CAB, LG, quarum CAB pluribus, quam LG, lateribus contineatur. Ex earum autem centro D, H ad latus AB, EG ducantur rectae perpendiculares, sive cateti *Da*, *Hd*. Dico, catetum *Da* esse majorem catetο *Hd*.

Demonstratio.

Ductis radiis DA, DB in figura CAB, & HE, HG in figura LG, cum plura sint latera figurae CAB, quam figurae LG, earumque perimetri sint aequales (§. 1.), latus EG erit majus latere AB, & quoniam tam radii DA, DB, quam radii HE, HG sunt aequales (*Lib. IX. §. 19.*), duo triangula ADB, EHG erunt isosceles (*Lib. V. §. 25.*); atque adeo latera AB, EG bifariam divisa erunt a catetis *Da*, *Hd* (*Ibid. §. 78.*), eritque semilatus E*d* majus semilatere A*a* (*Lib. I. §. 126.*). Secetur ergo semilatus E*d* in *e*, ita nimirum ut sit *ed*=A*a*. Quoniam igitur angulus EHG est ad quatuor rectos, ut latus EG ad totum perimetrum EGKL, sive CAB, & perimeter CAB ad latus AC, ut sunt quatuor anguli recti ad angulum ADB (*Lib. IX. §. 125.*), erit ad

ex *æqualitate rationis* angulus EHG ad angulum ADB, ut latus EG ad latus AB (*Lib.* I. §. 179.), cumque angulus EH*d* sit ad angulum AD*a*, ut angulus EHG ad angulum ADB, & latus E*d* ad latus A*a*, sive ad segmentum *ed* illi æquale, ut totum EG ad totum AB (§. 126.), quatenus nempe cateti D*a*, H*d* tam angulos ADB, EHG, quam latera AB, EG bifariam dividunt (*Lib.* V. §§. 78. 79.), erit quoque angulus EH*d* ad angulum AD*a*, ut latus E*d* ad latus *ed*. Major autem est proportio rectæ E*d* ad rectam *ed*, quam anguli EH*d* ad angulum *e*H*d* (§. 9.). Ergo major itidem erit proportio anguli EH*d* ad angulum AD*a*, quam anguli EH*d* ad angulum *e*H*d*, atque adeo angulus *e*H*d* erit major angulo AD*a* (*Lib.* I §. 120.). Duo porro anguli *ed*H, A*a*D æquales sunt inter se, utpore recti; tresque anguli trianguli *e*H*d* adæquant tres angulos trianguli AD*a* (*Lib.* V. §. 45.). Igitur reliquus angulus H*ed* erit minor reliquo DA*a* (*Syn. Alg.* §. 269). Hinc, si ad punctum *e* ponatur angulus *bed* angulo DA*a* æqualis, recta *be* cadet necessario extra rectam H*e* (*Lib.* III. §. 9.), simulque proinde concurret cum recta *d*H in directum producta ultra centrum H in puncto *b*; & quoniam duo anguli DA*a*, D*a*A trianguli AD*a* sunt æquales duobus angulis *bed*, *bde* trianguli *ebd*, alter alteri, & latera A*a*, *ed*, quæ ipsis æqualibus angulis adjacent, posita sunt æqualia, latus D*a* æquabit latus *bd* (*Lib* V. §. 93.). Latus autem *bd* est majus cateto H*d*, estque latus D*a* catetus figuræ ABC. Ergo catetus D*a* figuræ ABC est major cateto H*d* figuræ LG. Itaque *isoperimetrarum* figurarum &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Catetus circuli est major cateto cujuslibet polygoni regularis ipsi circulo isoperimetri.

12. Circulus enim est polygonum regulare infinitorum laterum (*Lib.* XI. §. 149.), ac proinde hujusmodi, ut nullum sit polygonum regulare a circulo diversum, cujus perimeter in tot latera sit divisus, in quot divisus est perimeter circuli.

Corollarium III.

Polyedrorum regularium isoperimetrorum illud habet majorem catetum, quod pluribus planis continetur.

13. Enimvero, quemadmodum in figuris planis regularibus rectilineis augeri nequit numerus laterum illarum perimetrum constituentium, quin latera ipsa magis a centro recedant, atque adeo quin earundem catetus major fiat, ita in figuris solidis regularibus, quæ planis terminantur, numerus terminantium planorum augeri haud potest, quin similiter plana ipsa a figuræ centro magis continuo remota fiant, ejusque propterea catetus major evadat.

Corollarium III.

Catetus sphæra est major cateto cujuslibet polyedri regularis, quod sit ipsi sphæra isoperimetrum.

14. Cum enim sphæra sit polyedrum regulare infinitis planis terminatum (*Lib.* XIII. §. 117.) nullum est polyedrum regulare a sphæra diversum, cujus superficies plura, quam sphæræ superficies, plana contineat.

Theorema IV.

Isoperimetrarum figurarum rectilinearum regularium illa majoris est areæ, quæ pluribus lateribus continetur.

15. Sint duæ figuræ regulares rectilineæ *isoperimetræ* CAB, LEG, quarum CAB pluribus, quam LEG, lateribus comprehendatur. Dico, aream figuræ CAB esse majorem area figuræ LEG.

Demonstratio.

Area figuræ CAB adæquat rectangulum contentum sub cateto D*a*, & sub semiperimetro *a*M*m*, & area figuræ LEG rectangulum contentum sub cateto H*d*, & sub semiperimetro *d*GKF (*Lib.* X. §. 29.); ut proinde harum
Fig. 8. Fig. 9. Tab. 17. figurarum areæ sint *directe* inter se, sicuti hujusmodi rectangula. Rectangulum autem ex cateto D*a*, & ex semiperimetro *a*M*m* est majus rectangulo ex cateto H*d*, & ex semiperimetro *d*GKF (*Lib.* IX. §. 100.); cum semiperimetri, qui spectari possunt, veluti ipsorum rectangulorum bases, sint æquales inter se; catetus vero D*a* sit major cateto H*d* (§. 11.) ac proinde inæquales sint illorum rectangulorum altitudines. Ergo area quoque figuræ CAB est major area figuræ LEG (*Lib.* I. §. 45.). Isoperimetrarum itaque figurarum &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Areæ figurarum rectilinearum regularium diversi generis sibi mutuo isoperimetrarum sunt directe inter se, ut ipsarum cateti.

16. Demonstravimus enim, aream figuræ CAB esse ad aream figuræ LEG illi isoperimetræ, ut est rectangulum contentum sub cateto D*a*, & sub semiperimetro *a*M*m* ad rectangulum contentum sub cateto H*d*, & sub semiperimetro *d*GKF. Hujusmodi autem rectangula, utpote æquales bases habentia, sunt, ut cateti, nempe ut altitudines (*Lib.* IX. §. 100.). Ergo areæ quoque ipsarum figurarum CAB, LEG erunt, ut cateti D*a*, H*d*.

Co-

Corollarium II.

Area circuli excedit aream cujuslibet polygoni regularis illi isoperimetri.

17. Area nimirum circuli ACB excedit aream polygoni regularis RAB ipsi circulo *isoperimetri*. Etenim, cum circulus sit polygonum regulare infinitorum laterum (§.149.), nullum est polygonum regulare a circulo, diversum, quod tot lateribus contineatur, quot circulus comprehenditur. Ergo illius area est major area polygoni cujuscunque regularis illi isoperimetri (§.15.). Accedit, catetum DC circuli excedere catetum D*s* polygoni RAB (§. 12.). Ergo illius quoque area erit major area polygoni RAB (§. 16.). Fig. 8. Tab.17.

Corollarium III.

18. Hinc *circulus est maxima omnium figurarum rectilinearum regularium, ua sunt ipsi circulo isoperimetra.*

Theorema V.

Polyedrorum regularium isoperimetrorum illud est majus, quod pluribus planis continetur.

19. Sint duo polyedra regularia isoperimetra ABC, DEF, quorum ABC pluribus numero planis, quam DEF, contineatur. Dico, aream polyedri ABC majorem esse area polyedri DEF. Fig.11. Fig.14. Tab.17.

Demonstratio.

Recta *ae* sit catetus polyedri ACB, & recta *bx* sit catetus polyedri DEF. Concipiatur autem parallelepipedum *amn*, cujus basis *emn* adæquet tertiam partem superficiei polyedri ABC, & altitudo *ae* ipsius catetum; nec non parallelepipedum *bxy*, cujus itidem basis *xyz* sit tertia pars superficiei polyedri DEF, & altitudo *bx* sit ejusdem catetus. Quoniam igitur superficies ipsorum polyedrorum sunt æquales (§. 1.), bases quoque *emn*, *xyz* parallelepidedorum *amn*, *byz* erunt æquales (*Lib.* I. §. 126.); atque adeo parallelepipedum *amn* erit ad parallelepidedum *byz*, ut altitudo *ae* ad altitudinem *bx* (*Lib.* XIII. §. 47.), sive ex constructione, ut catetus polyedri ACB ad catetum polyedri DEF. Catetus autem *ae* polyedri ABC est major cateto *bx* polyedri DEF (§. 13.). Ergo parallelepipedum quoque *amn* erit majus parallelepipedo *byz* (*Lib.* I. §. 45.). Manifestum porro est, polyedrum ACB esse æquale parallelepidedo *amn*, & polyedrum DEF parallelepipedo *byz* (*Lib.* XIV. §. 100.). Ergo polyedrum ACB majus itidem erit polyedro DEF (*Syn. Alg.* §. 260.). Polyedrorum ergo regularium &c. quod erat ostendendum. Fig.15. Fig.16. Tab.17.

Corollarium I.

Areæ polyedrorum regularium sibi mutuo isoperimetrorum sunt directe inter se, ut ipsorum cateti.

20. Ostensum siquidem est, parallelepipeda *amn*, *byz*, quibus polyedra ACB, DEF sunt æqualia, esse *directe* inter se, ut ipsorum altitudines *ae*, *bx*, quæ ab ipsorum polyedrorum catetis non sunt diversæ.

Corollarium II.

21. *Ex quinque corporibus regularibus cubus est major tetraedro illi isoperimetro, octaedrum cubo, dodecaedrum octaedro, & icosaedrum dodecaedro;* ac proinde *icosaedrum est quinque corporum regularium sibi mutuo isoperimetrorum maximum, tetraedrum vero omnium minimum.*

Corollarium III.

Area sphæræ excedit aream cujuslibet polyedri regularis illi isoperimetri.

22. Ut si sphæræ ACB isoperimetrum fuerit polyedrum regulare AeC, Fig.12. sphæra erit major polyedro AeC. Etenim numero plura sunt plana, qui- Fig.13. bus terminatur sphæra ACB, quam illa, quibus polyedrum AeC compre- Tab.17. henditur; cum illa sint numero infinita (*Lib.* XIII. §. 117.), hæc vero finita. Adde, catetum DC sphæræ esse majorem cateto *ae* polyedri AeC (§.14.). Ergo sphæra ACB major itidem erit polyedro AeC (§.23.).

Corollarium IV.

23. Perspicuum idcirco remanet, *sphæram esse omnium solidorum regularium ipsi sphæræ isoperimetrorum maximum.*

Theorema VI.

Sphæra est major tam cylindro, quam cono ipsi sphæræ isoperimetro.

I.

24. Spectetur sphæra ACB. Dico primo, ipsam esse majorem quocunque cylindro illi *isoperimetro*.

De-

Demonſtratio.

Sphæra ACB adæquat cylindrum, cujus baſeos circulus ſit æqualis toti ſuperficiei ipſius ſphæræ, altitudo vero tertiæ parti radii DC (*Lib.* XIV. §. 107.), ac proinde eſt æqualis cylindro, cujus tota ſuperficies eſt major ſuperficie ipſius ſphæræ. Ergo ſphæra eſt major cylindro, cujus ſuperficies ipſius ſphæræ ſuperficiem adæquat.

II.

25. Dico 2, ſphæram ACB eſſe majorem cono, qui ſit ipſi ſphæræ *iſoperimeter*.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Sphæra enim eſt æqualis cono, cujus baſeos circulus ſit æqualis toti ſuperficiei ipſius ſphæræ, altitudo vero ejuſdem radio (§. 103.). Itaque ſphæra &c. quod erat oſtendendum.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER XVII.

Præcipua elementaris Geometriæ problemata resolvuntur, & demonstrantur.

Elementaris Geometriæ problemata, quæ in hoc postremo libro resolvuntur, & ex traditis principiis demonstrantur, sunt præcipua, quæ in hac Geometriæ parte tradi solent. Totum porro librum in tres sectiones, majoris claritatis gratia, partiti sumus, quarum prima ea continet problemata, quæ ad *lineam* spectant; secunda complectitur illa, quæ ad *figuras planas*; tertia vero, quæ ad *solidas* pertinent, comprehendit.

SECTIO PRIMA.

De linea recta, & angulo plano rectilineo.

PROBLEMA I.

Rectam lineam finitam bifariam dividere.

Fig. 4. Tab.18. 1 Esto recta AB, quam bifariam dividere oporteat.

Resolutio.

Ex punctis extremis A, B lubito *circini* intervallo, quod dimidiam ipsius rectæ partem excedat, describantur arcus *ab*, *cd*, *ef*, *mn* se mutuo secantes in punctis *x*, *z*, per quæ ducatur recta *xz*. Hæc bifariam dividet ipsam rectam AB in puncto C.

Demonstratio.

Quoniam rectæ A*x*, B*x* ex constructione sunt æquales (*Lib.* VII. §. 10.), triangulum A*x*B erit isosceles (*Lib.* V. §. 25.). Rursus cum duo latera A*x*, B*x* sint æqualia, & latus *xz* sit commune utrique triangulo A*xz*, B*xz*, eorumque bases A*z*, B*z* sint æquales (*Lib.* VII. §. 10.), angulus A*xz* æquabit angulum B*xz* (*Lib.* V. §. 82.). Ergo recta *x*C bifariam dividet angulum ver-

verticalem AxB trianguli isoscelis AxB. Quamobrem recta xC bifariam quoque dividit rectam AB (§. 76.), adeoque &c.

COROLLARIUM.

2. Cum ob æqualitatem rectarum xA, Az, zB, Bx quadrilaterum $xAzB$ sit parallelogrammum (*Lib.* VI. §. 28.), &, qua ratione recta xz bifariam dividit rectam AB, eadem ratione recta xz a recta AB bifariam dividatur, sintque rectæ AB, xz diagonales parallelogrammi $xAzB$, perspicuum remanet, *diagonales parallelogrammi sese mutuo bifariam dividere*.

SCHOLION.

3. Si lineæ dividendæ longitudo major fuerit, quam superior operatio patiatur, auferantur hinc inde, initio sumto ab extremis, partes numero, Fig. 4.
& magnitudine æquales, donec idoneum segmentum in medio relictum Tab. 18.
fuerit. Ut si dividenda sit recta DE, detractis hinc inde æqualibus partibus DA, BE, residuum segmentum AB bifariam, ut supra, secetur. Tota enim recta DE erit hoc ipso bifariam divisa.

PROBLEMA II.

Arcum circuli bifariam dividere.

4. Dividere oporteat bifariam arcum circuli AyB;

Resolutio.

Extrema puncta arcus jungantur recta AB, quæ bifariam dividatur ope Fig. 4.
rectæ xz (§. 1.). Hæc bifariam quoque dividet arcum ipsum AyB. Tab. 18.

Demonstratio.

Cum enim, ut §. 1. ostensum est, anguli Axz, Bxz sint æquales, & triangulum AxB ex constructione sit isosceles, recta xC erit chordæ AB perpendicularis (§. 1.). Ergo recta ipsa xC, sive xz, arcum AyB bifariam dividit (*Lib.* VII. §. 40.).

PROBLEMA III.

Angulum rectilineum bifariam dividere.

5. Esto angulus rectilineus AxB bifariam dividendus.

Resolutio.

Fig. 4. Tab. 18. Ex apice x, lubito circini intervallo, secentur rectæ xA, xB in punctis A, B, & ducatur recta AB, quæ bifariam dividatur, ut supra, ope rectæ xz. Hæc bifariam dividet ipsum angulum AxB.

Demonstratio.

Patet ex demonstratione §. 1.

PROBLEMA IV.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

6. Ad datam rectam lineam AB, datumque in ea punctum a construere oporteat angulum rectilineum, qui sit æqualis dato angulo DCE.

Resolutio.

Fig. 5. 6. Tab. 18. Ex dati anguli apice C, lubito *circini* intervallo, describatur arcus DE inter rectas CD, CE comprehensus. Tum eodem intervallo, ex dato puncto a fiat arcus bd, in quo ex puncto b sumatur portio be arcui DE æqualis, & ducatur recta af. Angulus faB erit angulus quæsitus.

Demonstratio.

Cum enim arcus be, DE sint æquales, anguli quoque bae, DCE erunt æquales (*Lib.* III. §. 14.).

PROBLEMA V.

Per datum punctum extra datam rectam ducere rectam illi parallelam.

7. Extra rectam AB habeatur punctum C, per quod rectam ipsi AB parallelam ducere oporteat.

Resolutio.

Fig. 7. Tab. 18. A dato puncto C ad datam AB ducatur recta Ca angulum acutum constituens CaA. Tum centro a, intervallo aC describatur arcus Ce, & ex puncto C, eodem *circini* intervallo, arcus ad, in quo sumto arcu ab arcui Ce æquali, per puncta C, b agatur recta Cb, quæ erit parallela quæsita.

De-

Demonstratio.

Quoniam arcus Ce, ba sunt æquales, æquales erunt anguli alterni Cae, bCa (*Lib.* III. §. 14.). Ergo rectæ Cb, AB erunt parallelæ (*Lib.* IV. §. 112.).

PROBLEMA VI.

Secare rectam lineam, ut altera recta secta est.

8. Secare oporteat rectam AC, ut est secta recta AE in puncto D.

Resolutio.

Jungantur rectæ AC, AE, ut angulum constituant CAE. Tum ab extremo C ad extremum E ducta recta CE, per punctum D agatur recta BD rectæ CE parallela (§. 7.). Recta BD secabit rectam AC in puncto B, ut secta est recta AE in D. Fig. 8. Tab. 18.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione recta BD sit parallela basi CE trianguli CAE, habebitur AB. BC = AD. DE (*Lib.* IX. §. 55.).

COROLLARIUM I.

9. Hinc patet artificium dividendi rectam lineam secundum datam proportionem, puta rectam AE secundum rationem rectæ ab ad rectam bc. Etenim, ducta recta indefinita AC angulum constituente CAE cum recta AE, ponatur AB = ab, & BC = bc, junctisque punctis C, E recta CE, per punctum B ducatur recta BD ipsi CE parallela (§. 7.). Erit AD. DE = ab. bc, cum sit AD. DE = AB. BC (*Lib.* IX. §. 55.). Fig. 8. Tab. 18.

COROLLARIUM II.

10. Manifestum est propterea, quomodo ex data recta AE imperata pars auferri possit, puta una pars tertia. Quandoquidem, si ducta recta indefinita AC, sumantur in ea ex puncto A tres partes æquales lubitæ magnitudinis AB, Bm, mC, junctisque punctis extremis C, E recta CE, per punctum B ducatur recta BD rectæ CE parallela, erit AD una pars tertia rectæ AE. Hinc

Corollarium III.

11. Liquido apparet, quomodo recta linea in quotcunque partes æquales secari possit. Illarum quippe una inventa, sumtaque ope *circini* illius magnitudine, tota ipsa recta in quæsitas partes dividetur.

PROBLEMA VII.

Data recta linea e puncto in illa dato rectam perpendicularem excitare.

12. In recta AH datum sit punctum C, ex quo rectam ipsi AH perpendicularem excitare oporteat.

Resolutio.

Fig.10. Tab.18. Extra ipsam AH sumatur quodvis punctum D, ex quo si ducatur recta ad datum punctum C, angulum acutum constituat. Tum ex ipso puncto D, intervallo DC describatur circulus *x*CB secans rectam AH in puncto B, ex quo ducatur diameter B*x*, & jungantur puncta *x*, C recta *x*C, quæ erit ipsi AH perpendicularis.

Demonstratio.

Rectus enim est angulus *x*CH (*Lib.* VII. §.75.), utpote in semicirculo *x*CB consistens.

Corollarium.

13. Manifestum est, quomodo per datum punctum in data recta linea possit duci recta, quæ rectam ipsam ad angulos rectos dividat.

PROBLEMA V.

Ad datam rectam lineam ex puncto extra illam posito rectam perpendicularem ducere.

14. Extra rectam AH datum habeatur punctum *x*, ex quo rectam ducere oporteat ipsi AH perpendicularem.

Resolutio.

Fig.10. Tab.18. Ex dato puncto *x* ad ipsam AH ducatur recta *x*B acutum angulum efficiens *x*BA. Hac deinde bifariam divisa in puncto D (§. 1.), centro D, in-

intervallo DB, secetur recta AH in C, ad quod ex dato puncto x ducatur recta xC, quæ erit perpendicularis quæsita.

Demonstratio.

Constat enim, descripto circulo xCB, angulum xCB in semicirculo consistere, atque adeo ipsum esse rectum (*Lib.* VII. §. 75.).

S C H O L I O N.

15. Cognito artificio ducendi rectam, quæ alteri rectæ ad perpendiculum incumbat, liquido apparet, quomodo *norma* construi possit. Est enim *norma* instrumentum Geometricum ex duabus regulis ad angulum rectum simul junctis compositum, quo explorari solet, an datus angulus rectilineus sit rectus.

D E F I N I T I O.

16. *Recta linea dicitur secta media, & extrema ratione, cum majus illius segmentum est ad segmentum minus, ut tota ipsa linea est ad segmentum majus.* Recta nimirum AB erit secta *media, & extrema ratione* in puncto D, si fuerit AD . DB = AB . AD. Fig. 12. Tab. 18.

C O R O L L A R I U M.

17. Itaque recta linea erit secta *media, & extrema ratione*, si majus illius segmentum fuerit media proportionalis inter totam ipsam lineam, & segmentum minus; ac proinde si quadratum segmenti majoris fuerit æquale rectangulo contento sub tota, & sub minori segmento (*Lib.* IX. §. 118.).

P R O B L E M A IX.

Rectam lineam finitam media, & extrema ratione dividere.

18. Esto recta AB *media, & extrema ratione* dividenda.

Resolutio.

Bifariam divisa recta AB in a (§. 1.), toti AB adjiciatur pars Ab = Aa: Tum ex puncto A erecta perpendiculari Ad = BA (§. 12.), centro b, intervallo bd, describatur arcus dD secans rectam AB in D. Recta AB erit secta in D *media, & extrema ratione*. Fig. 12. Tab. 18.

De-

Demonſtratio.

In directum producta recta Db in e, fiat eb = bA; adeoque eA = AB, ſitque ex rectangulum ex tota eA, ſive AB ſimul cum adjecta AD in ipſam AD; & em ſit quadratum rectæ eA, ſeu AB. ſive Ad. Quoniam igitur recta eA diviſa eſt bifariam in b, eique adjecta eſt pars AD, rectangulum ex, una cum quadrato partis dimidiæ bA erit æquale quadrato rectæ bD (*Lib.* XV. §. 246.); ac proinde etiam quadrato rectæ bd; cum ſcilicet ſit bd = bD. Quadratum autem rectæ bd eſt æquale quadratis laterum bA, Ad ſimul ſumtis (*Lib.* VI. §. 37.). Ergo rectangulum quoque ex una cum quadrato partis bA erit æquale quadratis rectarum bA, Ad (*Syn. Alg.* §. 261.), nempe quadrato em rectæ eA una cum quadrato rectæ bA ex conſtructione. Sublato propterea communi quadrato rectæ bA, rectangulum ex erit æquale quadrato em (*ibid.* §. 266.), ſique his dematur commune rectangulum en, reliquum fm erit æquale reſiduo quadrato Ax (*ibidem*). Eſt autem fn = AB, eg = eA = AB, ef = AD, adeoque fg = DB; ac proinde fm eſt rectangulum ex tota AB in partem DB, & Ax eſt quadratum partis AD. Ergo recta AB erit ſecta *media, & extrema ratione* in D (§. 17.)

PROBLEMA X.

Datis duabus rectis lineis tertiam geometrice proportionalem invenire.

19. Poſt rectas ab, bc invenire oporteat tertiam geometrice proportionalem.

Reſolutio.

Ducta recta indefinita AD, ſumatur AB = ab; erectaque perpendiculari
Fig. 9. BC = bc (§. 12.), jungantur puncta A, C recta AC, & ex puncto C aga-
Tab. 18. tur recta CD, quæ ad perpendiculum incumbat rectæ CA, rectæque BD occurrat in puncto D. Recta BD erit tertia proportionalis quæſita.

Demonſtratio.

Cum enim ex conſtructione angulus ACD ſit rectus, triangulum ACD erit rectangulum. Recta autem CB hypotenuſæ AD itidem ex conſtructione ad perpendiculum inſiſtit. Ergo erit ÷ AB . BC . BD (*Lib.* IX. §. 74.).

COROLLARIUM.

20. Hinc apparet, quomodo linearum proportio in infinitum continuari poſſit;

PRO-

PROBLEMA XI.

Datis tribus rectis lineis quartam geometrice proportionalem invenire.

21. Datis tribus *ab*, *bc*, *ad*, invenire oporteat quartam, ad quam se habeat tertia *ad*, ut se habet prima *ab* ad secundam *bc*.

Resolutio.

Ex puncto A ducantur rectae indefinitae AC, AE angulum constituentes CAE. Tum ex puncto A sumatur in recta AC segmentum AB $=$ *ab*, & segmentum BC $=$ *bc*, in recta vero AE segmentum AD $=$ *ad*, junctisque punctis B, D recta BD, ex puncto C ducatur recta CE parallela rectae BD (§. 7.). Segmentum DE erit quarta proportionalis quaesita. Fig. 8. Tab. 18.

Demonstratio.

Nam, cum in triangulo CAE recta BD sit parallela basi CE, erit AB. BC $=$ AD. DE (*Lib.* IX. §. 55.).

PROBLEMA XII.

Inter duas rectas lineas mediam geometrice proportionalem invenire.

22. Inter duas rectas AB, BD mediam geometrice proportionalem invenire oporteat.

Resolutio.

Duae rectae AB, BD jungantur in directum, ita nimirum ut unam rectam constituant AD, & ex puncto B educatur recta perpendicularis BC (§. 12.). Tum bifariam divisa tota AD in puncto E (§. 1.), centro E, intervallo partis dimidiae EA, describatur semicirculus ACD secans rectam BC in puncto C. Recta BC erit media proportionalis quaesita. Fig. 9. Tab. 18.

Demonstratio.

Patet ex §. 76. lib. IX.

SECTIO SECUNDA.

De figuris planis.

DEFINITIO.

Fig. 11. Tab. 18. 23. *Figura rectilinea super datam rectam lineam describi dicitur, cum ipsa linea assumitur pro latere figuræ describendæ.* Sic triangulum ADB dicitur descriptum super rectam AB, quia unum ex lateribus ipsius trianguli est ipsa recta AB.

PROBLEMA I.

Ex tribus rectis lineis, quarum duæ simul sumtæ reliqua sint majores, triangulum construere.

24. Ex tribus rectis lineis AB, *ab*, *cd*, quarum duæ quæcumque simul sumtæ reliquam excedant, triangulum construere oporteat.

Resolutio.

Ex puncto extremo A unius ex illis AB, intervallo alterius *cd*, describatur arcus *mn*, arcus vero *yx* priorem secans ex altero extremo B, intervallo rectæ *ab*. Tum ex puncto sectionis D ad extrema A, B ducantur rectæ AD, BD, quæ constituent triangulum quæsitum ADB.

Fig. 11. Tab. 18.

Demonstratio.

Est enim AD$=$*cd*, & BD$=$*ab* (*Lib. VII. §.* 10.).

COROLLARIUM.

25. Hinc patet artificium construendi super datam rectam lineam triangulum tam æquilaterum, quam isosceles. Quandoquidem æquilaterum erit triangulum, si tres datæ rectæ lineæ fuerint æquales; erit vero isosceles, si duæ tantum æquales fuerint, illæ nimirum, quæ pro lateribus assumuntur.

PROBLEMA II.

Datis duabus rectis lineis, rectangulum construere.

26. Rectangulum construere oporteat, cujus duo latera circa angulum rectum sint duæ datæ rectæ lineæ *ab*, *ad*.

Re-

Resolutio.

Posita recta AB $=$ *ab*, ex illius extremis A, B erigantur perpendiculares indefinitæ AF, BG (§. 12.); tum fiat AD $=$ *ad*, & BE $=$ AD, junganturque extrema D, E recta DE. Quadrilaterum DB erit rectangulum quæsitum.

Demonstratio.

Enimvero, cum rectæ AD, BE ad perpendiculum in eodem plano incumbant rectæ AB, erunt parallelæ (*Lib.* IV. §. 10.). Sunt autem æquales ex constructione. Ergo duæ quoque AB, DE parallelæ erunt inter se (*Lib.V.* §. 88.), & æquales (*Ibid.* §. 75.); ac proinde quadrilaterum DB erit parallelogrammum (*Lib. VI.* §. 8.), & quidem rectangulum (*Ibid.* §. 9.); adeoque &c.

COROLLARIUM.

27. Liquido apparet, quomodo super datam rectam quadratum construi possit. Satis namque est, ut altera illi æqualis assumatur, atque ex illis rectangulum fiat.

PROBLEMA III.

Super datam rectam lineam dato triangulo rectilineo triangulum rectilineum simile similiterque positum describere.

28. Super rectam AB dato triangulo rectilineo *abe* triangulum simile similiterque positum describere oporteat.

Resolutio.

Ad extremum A datæ rectæ AB constituatur angulus EAB æqualis angulo *eab*, & ad extremum B ejusdem rectæ angulus EBA angulo *eba* æqualis (§. 6.); rectæ autem AE, BE directe producantur, donec concurrant in puncto E. Triangulum AEB erit simile triangulo *aeb*, & similiter positum. Fig. 14. Fig. 15. Tab. 18.

Demonstratio.

Cum enim anguli EAB, EBA sint æquales ex constructione angulis *eab*, *eba*, alter alteri, reliquus itidem AEB erit reliquo *aeb* æqualis (*Lib.*V. §. 46.). Duo igitur triangula AEB, *aeb* sunt æquiangula; adeoque similia (*Lib.* X. §. 66.); cumque æquales eorum anguli eodem ordine sese consequantur, erunt etiam similiter posita; adeoque &c.

PROBLEMA IV.

Super datam rectam lineam dato polygono polygonum simile similiterque positum describere.

29. Super rectam AB describere oporteat pentagonum simile pentagono *ecbd*, & similiter positum.

Resolutio.

Fig. 14. Fig. 15. Tab. 18. Pentagonum *ecb* resolvatur in tria triangula *aeb*, *ace*, *bdes* tum super rectam AB fiat triangulum AEB simile triangulo *aeb*, super latus AE triangulum ACE simile triangulo *ace*, & super latus EB triangulum BDE simile triangulo *bde* (§. 28.). Pentagonum CAD erit simile dato pentagono *ead*, & similiter positum.

Demonstratio.

Utrumque pentagonum CAD, *cad* in totidem ex æquo triangula similia resolvi potest. Id autem nonnisi similibus polygonis convenit. Ergo duo ipsa pentagona CAD, *cad* sunt similia.

PROBLEMA V.

Dati circuli centrum invenire.

30. Esto circulus *x*CB, cujus centrum invenire oporteat.

Resolutio I.

Ducta chorda CB, ex altero ipsius extremo C erigatur perpendicularis
Fig. 10. C*x* occurrens peripheriæ ipsius circuli in puncto *x* (§. 12.); duoque ex-
Tab. 18. trema puncta *x*, B jungantur recta *x*B, quæ bifariam dividatur in D (§. 1.). Punctum D erit centrum ipsius circuli.

Demonstratio.

Cum enim angulus *x*CB sit rectus ex constructione, segmentum *x*CB circuli erit semicirculus (*Lib.* VII. §. 78.). Ergo recta *x*B erit diameter circuli *x*CB; ac proinde punctum D illius centrum.

Resolutio II.

Ducta utcunque chorda CB, eaque bifariam divisa in puncto *b* (§. 1.), erigatur perpendicularis *ea* (§. 12.), occurrens peripheriæ ipsius circuli in pun-

punctis a, e, ipsaque ae bifariam dividatur in puncto D (§. 1.), quod erit centrum circuli quæsitum.

Demonstratio.

Patet manifeste ex §. 42. lib. VII.

PROBLEMA VI.

Per tria data puncta, quæ non sint in directum posita, circulum describere.

31. Circulum describere oporteat, cujus peripheria simul transeat per tria puncta A, B, C non in directum posita.

Resolutio.

Puncta A, B * B, C jungantur rectis AB, BC, quibus bifariam divisis in a, e (§. 1.), ex ipsis punctis a, e erigantur perpendiculares aE, eG (§. 12.), sese mutuo secantes in puncto x, quod erit centrum quæsiti circuli, nempe circulus descriptus ex puncto x, intervallo xA, transibit per tria puncta A, B, C. Fig. 16. Tab 18.

Demonstratio.

Ex puncto x ad tria ipsa puncta A, B, C ductæ intelligantur rectæ xA, xB, xC. Quoniam igitur recta AB secta est bifariam in a & recta ax est communis utrique triangulo Aax, Bax, duo hujusmodi triangula habebunt duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri. Est autem etiam angulus Aax æqualis angulo Bax; cum uterque sit rectus (*Lib* III. §. 37.). Ergo basis Ax æquabit basim Bx (*Lib. V.* § 73.). Eodem modo ostendam, rectam xC esse æqualem rectæ Bx. Igitur rectæ xA, xB, xC sunt æquales; ac proinde peripheria circuli descripti ex puncto x, intervallo unius ex illis rectis lineis, transibit per tria puncta A, B, C.

COROLLARIUM I.

32. Itaque per tria quæcunque puncta non in directum posita transire potest peripheria circuli; atque hinc

COROLLARIUM II.

33. Circa quodcunque triangulum planum rectilineum circulus describi potest.

COROLLARIUM III.

34. Eodem modo invenitur centrum dati arcus circuli, seu datus circuli arcus perficitur. Satis namque est, ut determinatis tribus punctis in ipso arcu, inveniatur centrum circuli, cujus peripheria per tria illa puncta incedat.

LEMMA I.

Omnis figura rectilinea æquilatera circulo inscripta, est regularis.

35. Circulo ABCD inscripta sit figura rectilinea æquilatera ABCD. Dico, figuram rectilineam ABCD esse regularem.

Demonstratio.

Quoniam ex hypothesi latera AB, BC, CD sunt æqualia, arcus quoque *AdB*, *BfC*, *CmD* erunt æquales (*Lib.* VIII. §. 38.); ac proinde totus arcus
Fig. 17. Tab. 8. *AdeC* æquabit totum arcum *BfmD* (*Syn. Alg.* §. 265.). Igitur duo itidem anguli RBC, BCD sunt æquales (*Lib.* VIII. §. 73.). Eodem modo ostendentur æquales etiam duo BCD, CDA, atque ita deinceps. Rectilineum ergo ABCD est æquiangulum. Est autem etiam æquilaterum ex hypothesi. Ergo est regulare (*Lib.* V. §. 20.). Omnis itaque figura &c. quod erat ostendendum.

PROBLEMA VII.

Peripheriam circuli unico circini intervallo in duodecim æquales partes dividere.

36. Esto peripheria circuli ABCD unico circini intervallo in duodecim æquales partes dividenda.

Resolutio.

Ducantur diametri AC, BD sese ad angulos rectos secantes in centro *a* (§. 13.); tum intervallo radii B*a*, ex puncto A secetur peripheria in pun-
Fig. 17. Tab. 18. ctis *d*, *x*; ex puncto B in punctis *b*, *f*; ex puncto C in punctis *e*, *n*; & ex puncto D in punctis *m*, *z*, eritque tota ipsa peripheria divisa in duodecim partes æquales, prout quæsitum fuerat.

Demonstratio.

Enimvero, cum ex constructione arcus BA, AD sint æquales (*Lib.* III. §. 14.), sicuti etiam arcus B*b*, D*z* (*Lib.* VII. §. 38.), etiam reliquus *b*A reliquo A*z* erit æqualis (*Syn. Alg.* §. 266.). Totus autem *b z* est tertia pars semi-

ſemiperipheriæ BAD; cum uterque *Bb*, Dz ſit itidem una pars tertia ejuſdem (*Lib.* VII. §. 97.). Ergo uterque arcus *b*A, Az erit una ſexta pars ſemiperipheriæ BAD; atque adeo una pars duodecima totius peripheriæ ABCD. Eodem modo idipſum demonſtrabitur de arcubus *d*B, B*e*, *f*C, C*m*, *n*D, D*x*. Igitur quilibet itidem reliquorum *bd*, *ef*, *mn*, *xz* erit una pars duodecima totius peripheriæ; quippe ſi æqualibus A*d*, *ed* demantur æquales B*e*, A*b*, reliquus B*d* reliquo *db* erit æqualis (*Syn. Alg.* §. 266.).

COROLLARIUM I.

37. Peracta diviſione peripheriæ circuli in duodecim partes æquales, ſola biſectione arcus habebitur diviſio peripheriæ circuli in partes 24, 48, 96 &c.

COROLLARIUM II.

38. Perſpicuum quoque eſt, quomodo *triangulum æquilaterum*, *quadratum*, *hexagonum*, *octogonum*, aliaque *polygona regularia* circulo inſcribi poſſint. Satis enim eſt, ut diviſa peripheria circuli in tot partes æquales, quot ſunt latera polygoni inſcribendi, horum arcuum chordæ ducantur. Ex præmiſſo ſiquidem Lemmate manifeſtum eſt, polygonum hinc factum eſſe regulare.

PROBLEMA VIII.

Ad datum punctum in peripheria circuli tangentem ducere.

39. In peripheria circuli AD datum ſit punctum A, ad quod rectam tangentem ducere oporteat.

Reſolutio.

Ducto radio CA, ex illius extremo, ſive ex dato puncto A erigatur perpendicularis AB (§. 12.), quæ erit tangens quæſita. Fig. 18. Tab. 18.

Demonſtratio.

Cum enim angulus BAC ex conſtructione ſit rectus, tota ipſa recta AB extra circuli peripheriam cadit (*Lib.* VII §. 43.).

PROBLEMA IX.

Ex dato puncto extra circulum ducere rectam, quæ circulum ipſum tangat.

40. Ex puncto D poſito extra circulum D ducere oporteat rectam, quæ circulum ipſum tangat.

Resolutio.

Ex centro C ad datum punctum D ducatur recta CD, qua bifariam divisa in *a* (§. 1.), centro *a*, intervallo partis dimidiæ *a*D, describatur semicirculus DAC secans peripheriam circuli in puncto A. Recta DA ducta a puncto D ad punctum sectionis A, erit tangens circulum.

Fig.18. Tab.18.

Demonstratio.

Rectus enim est angulus DAC (*Lib.* VII. §. 75.), utpote in semicirculo consistens.

LEMMA II.

Si recta linea secta fuerit extrema, & media ratione, triangulum isosceles, cujus basis sit æqualis majori segmento ipsius rectæ, utrumque autem latus totam ipsam rectam adæquet, habebit angulum ad basim duplum anguli verticalis.

41. Recta AB secta sit *media, & extrema ratione* in D. Majus autem ipsius segmentum AD sit æquale basi BC trianguli isoscelis BAC, cujus utrumque latus AB, AC rectam ipsam AB adæquet. Dico, utrumque angulum ACB, ABC ad basim duplum esse anguli verticalis BAC.

Fig.19. Tab.18.

Demonstratio.

Ducta ex puncto sectionis D ad extremum C recta DC, per tria puncta A, D, C transeat peripheria circuli ADCE, quam tangat recta BC in puncto C. Quoniam igitur angulus BCD adæquat angulum CAB, seu CAD (*Lib.* VII. §. 83.), si utrique adjiciatur angulus ACD, angulus BCA æqualis erit duobus angulis CAD, DCA simul sumtis (*Syn. Alg.* § 265.). Hos autem itidem adæquat angulus BDC (*Lib.* V. §. 50.). Ergo duo anguli ACB, BDC sunt æquales (*Syn. Alg.* §. 259.); cumque angulus ABC sit æqualis angulo ACB (*Lib.* V. § 60.), etiam angulus ABC angulo BDC æqualis erit (*Syn. Alg.* §. 261.); duoque idcirco latera DC, BC erunt æqualia (*Lib.* V. §. 65.). Posuimus autem rectam BC æqualem rectæ AD. Igitur recta AD æquabit rectam DC (*Syn. Alg.* §. 261.); & ideo duo anguli DAC, DCA erunt æquales (*Lib.* V. §. 60.). Constat porro, angulum BCA æquare duos angulos DCA, DAC, ut modo demonstravimus. Ergo angulus BCA est duplus anguli BAC, atque adeo etiam angulus ABC, utpote ipsi BCA æqualis, duplus est anguli BAC. Itaque si recta linea &c. quod erat ostendendum.

Co-

Corollarium I.

42. Cum tres anguli trianguli BAC valeant duos rectos (*ibidem* §. 40.), angulus BAC erit *quinta* pars duorum rectorum, atque adeo una pars *decima* quatuor rectorum. Quamobrem arcus BdC descriptus ex puncto A, intervallo totius rectæ AB, erit una pars *decima* peripheriæ circuli, cujus radius sit ipsa recta AB (*Lib.* VII. §. 28.).

Corollarium II.

43. Hinc, *si radius circuli media, & extrema ratione secetur, majus ipsius segmentum erit chorda arcus, qui est pars decima peripheriæ totius circuli.*

Problema X.

Super datam rectam lineam pentagonum regulare describere.

44. Pentagonum regulare construendum sit super datam rectam AB.

Resolutio.

Divisa recta AB extrema, & media ratione in C (§. 18.), ipsi AB hinc inde in directum adjiciantur partes AG, BH æquales majori segmento AC. Fig. 12. Tum ex punctis G, A, intervallo totius rectæ AB, describantur duo arcus Tab. 19. sese mutuo secantes in puncto D, sicuti etiam ex punctis B, H, eodem intervallo, duo arcus sese mutuo secantes in F, & ex punctis D, F, eodem intervallo, duo arcus, qui se mutuo dividant in puncto E. Hæc porro puncta A, D, E, F, B jungantur rectis AD, DE, EF, FB, eritque super rectam AB descriptum pentagonum regulare EAB.

Demonstratio.

Cum enim singula latera ipsius pentagoni ex constructione adæquent radium circuli, omnia erunt inter se æqualia (*Syn. Alg.* §. 259.). Igitur pentagonum EAB erit æquilaterum. Rursus quoniam ex hypothesi recta AB secta est *media, & extrema ratione* in C, sitque DA = AB, & GA = AC, ducta recta DG, quæ rectæ DA erit æqualis (*Lib* VII. §. 10.), angulus DAG æquabit *duas quintas* partes duorum rectorum (§. 42.); ac proinde, cum duo anguli DAG, DAB valeant duos rectos (*Lib.* III. §. 40.), angulus DAB tribus quintis partibus duorum rectorum æqualis erit. Eodem modo ostendam, angulum quoque FBA *tres quintas* partes duorum rectorum æquare. Igitur duo anguli DAB, FBA sunt inter se æquales (*Syn. Alg.* §. 259.). Præterea, cum triangula isoscelta GDA, BFH sint æqualia, & habeant æquales bases GA, BH, eorum altitudines Da, Fb erunt æquales (*Lib. IX.* §. 104.), &

& quia sunt parallelæ (*Lib.* IV. §. 9.) recta DF ducta a puncto D ad punctum F, erit parallela rectæ GH (*Lib.*V. §.88.). Anguli ergo alterni FDA, DAG erunt æquales (*Lib.* IV. §. 15.); cumque angulus DAG adæquet *duas quintas* partes duorum rectorum (§. 42.), iisdem itidem partibus angulus FDA æqualis erit. In triangulo autem isoscele DAB (ducta nimirum recta DB) duo anguli ADB, ABD sunt æquales (*Lib.* V. §. 60.), tresque ipsius anguli valent duos rectos (*Ibid.* §. 40.). Ergo, cum angulus DAB, ut modo vidimus, sit æqualis *tribus quintis* partibus duorum rectorum, angulus ADB, sicuti etiam angulus ABD, *unam quintam* partem duorum rectorum æquabit; rectaque idcirco DB angulum ADF bifariam dividet, & angulus DBF erit æqualis *duabus quintis* partibus duorum rectorum; cum totus ABF tres eorundem *quintas* partes contineat. Igitur anguli DBF, FBH sunt æquales (*Syn. Alg.* §. 259.). Constat autem, angulum DFB æqualem esse angulo alterno FBH (*Lib.* IV. §. 15.). Ergo angulus DFB æquabit angulum DBF (*Syn. Alg.* §. 261.); ac proinde latus DF erit lateri DB æquale (*Lib.* V. §. 65.). Duo itaque triangula DEF, DAB sunt sibi mutuo æquilatera, adeoque æquiangula (*Ibid.* §. 85.); eritque propterea angulus DEF æqualis angulo DAB; & angulus EDF angulo ADB. Angulus autem ADB est æqualis *uni quintæ* parti duorum rectorum. Ergo eandem partem angulus quoque EDF æquabit. Eidem porro parti æqualis est etiam angulus FDB, utpote æqualis alterno DBA. Igitur angulus EDA continet *tres quintas* partes duorum rectorum; estque ideirco angulo DAB æqualis. Manifestum quoque est, angulum EFB æquare angulum FBA, cum angulus EFD adæquet angulum DBA, & angulus DFB angulum FBD, ut supra demonstravimus. Ergo pentagonum EAB non tantum æquilaterum est, verum etiam æquiangulum; adeoque &c.

PROBLEMA XI.

Pentagonum regulare circulo inscribere.

45. Pentagonum regulare circulo ABD inscribere oporteat.

Resolutio.

Radius AF dati circuli secetur *media, & extrema ratione* in puncto x (§. 18.); sumptoque majori segmento Ax, secetur peripheria ipsius circuli ex puncto A in b; & sumatur arcus AB duplus arcus Ab, chordaque ducatur AB, quæ erit latus pentagoni regularis ABCDF quæsiti.

Fig. 2.
Tab. 19.

Demonstratio.

Cum enim arcus Ab sit una *pars decima* peripheriæ circuli ABD (§. 45.), arcus AB erit una *pars quinta* ejusdem. Quamobrem chordæ AB, BC, CD, DF, FA, utpote æqualibus arcubus subtensæ, erunt æquales (*Lib.* VII. §. 37.).

Igi-

Igitur pentagonum ACF erit æquilaterum; ac proinde regulare (§. 35.).

C O R O L L A R I U M.

46. Manifestum est, quomodo peripheria circuli in quinque partes æquales dividi possit, atque hinc in partes 10, 20, 40, 80 &c. sola arcus bisectione.

P R O B L E M A XII.

Quindecagonum regulare circulo inscribere.

47. Circulo ACD *quindecagonum* regulare inscribere oporteat.

Resolutio.

Aptetur circulo latus AD trianguli regularis (§. 38.), & latus AE pentagoni itidem regularis (§. 45.), ita nimirum ut idem punctum A sit utrique Fig. 3. commune. Tum arcus ED bifariam in puncto *e* dividatur (§. 4.). Chorda Tab. 19. dimidii arcus D*e* erit latus *quindecagoni* regularis circulo ACD inscribendi.

Demonstratio.

Facta namque hypothesi, ut tota peripheria circuli ABD sit $= 15$, arcus AED erit $= 5$, & arcus AE $= 3$; ac proinde AED $-$ AE $= 2$. Igitur illius pars dimidia D*e* erit $= \frac{1}{15}$ integræ peripheriæ ipsius circuli; adeoque &c.

C O R O L L A R I U M.

48. Patet idcirco, quomodo peripheria circuli dividi queat in 15 partes æquales; & hinc in partes 30, 60, 120 &c., arcus singulos bisecando.

P R O B L E M A XIII.

Figuræ rectilineæ regulari circulum inscribere.

49. Figuræ rectilineæ regulari ABD circulum inscribere oporteat.

Resolutio.

Bifariam divisis duobus lateribus AB, BD in punctis *b*, *e* (§. 1.), erigantur ex illis punctis rectæ perpendiculares *ba*, *ca* (§. 12.). Punctum *a*, in quo illæ concurrunt, erit centrum quæsiti circuli.

De-

Demonstratio.

Ex puncto *a* ad apices angulorum A, B, D ipsius figuræ ducantur rectæ *a*A, *a*B, *a*D. Quoniam igitur latera A*b*, *b*B triangulorum A*ab*, B*ab* ex constructione sunt æqualia, & latus *ab* est utrique triangulo commune, angulique A*ba*, B*ba*, utpote recti, sunt æquales, bases quoque *a*A, *a*B erunt æquales. (*Lib.* V. *§.* 73.). Eadem ratione æquales erunt rectæ *a*B, *a*D; ac proinde tres rectæ *a*B, *a*D, *a*A erunt inter se æquales. Æqualia sunt autem etiam latera AB, BD, nempe bases triangulorum A*a*B, B*a*D (*Ibid.* *§.* 20.) Igitur duo triangula A*a*B B*a*D, utpote sibi mutuo æquilatera, erunt æquiangula (*Ibid.* *§.* 85.) adeoque similia (*Lib* IX *§.* 66.) eorumque idcirco altitudines *ab*, *ac* erunt *directe* inter se, ut bases AB, BD, quæ sunt latera ipsorum homologa (*Ibid.* *§.* 78.); ac proinde erit *ab* = *ac*, quemadmodum est AB = BD (*Lib.* I. *§.* 45.). Eodem modo ostendam esse *ac* = *ad*, atque ita de ceteris, si quæ fuerint. Circulus ergo descriptus ex puncto *a*, intervallo *ab*, tangit omnia latera figuræ ABD; adeoque &c.

COROLLARIUM I.

50. *Centrum itaque figuræ regularis rectilineæ diversum non est a centro inscripti circuli.* Demonstravimus, cujus, rectas *a*A, *a*B, *a*D ductas a centro *a* inscripti circuli *bcd* ad apices angulorum A, B, D figuræ rectilineæ regularis ABD, esse inter se æquales.

COROLLARIUM II.

51. Cum punctum *a*, in quo concurrunt rectæ *ab*, *ac* bifariam atque ad angulos rectos dividentes latera AB, BD figuræ ABD, sit ejusdem figuræ centrum, manifeste apparet, quomodo centrum figuræ rectilineæ regularis inveniri possit.

COROLLARIUM III.

52. Invento centro figuræ rectilineæ regularis, habetur, quod requiritur, ut circulus ipsi figuræ circumscribi possit; atque hinc patet, *centrum figuræ rectilineæ regularis idem esse cum centro circumscripti circuli.*

PROBLEMA XIV.

Figuram rectilineam regularem circulo circumscribere.

53. Circulo *cyur* quadratum circumscribere oporteat.

Re-

Resolutio.

Peripheria dati circuli dividatur in quatuor partes æquales *cy*, *yu*, *ur*, *rc*; in tot nempe, quot sunt latera figuræ circumscribendæ, atque ad singula puncta divisionis ducantur radii *ac*, *ay*, *au*, *ar*, per quorum extrema agantur tangentes BC, CD, DA, AB (§ 39.), quæ constituent quadratum quæsitum ABCD. Fig. 17. Tab. 18.

Demonstratio.

Ductis a centro *a* ad apices angulorum circumscriptæ figuræ radiis *a*A, *a*B, *a*C, *a*D, cum duæ tangentes *c*B, B*y* sint æquales inter se (*Lib.* VII. §. 85.), sicuti etiam duæ *y*C, C*u*, nec non duæ *ac*, *ay* (*Ibid.* §. 10.), & latus B*a* sit commune utrique triangulo *ca*B, B*ay*, duo hujusmodi triangula, utpote æquilatera, erunt æquiangula (*Lib* V. §. 85.), angulus nempe *ca*B æquabit angulum B*ay*, & angulus *a*B*c* angulum *a*B*y*. Quamobrem angulus *cay* erit duplus anguli B*ay*, & angulus *c*B*y* anguli *a*B*y*. Eadem autem ratione etiam angulus *yau* est duplus anguli *ya*C, & angulus *y*C*u* anguli *y*C*a*. Ergo, cum duo anguli *cay*, *yau*, utpote æqualibus arcubus ex constructione insistentes, sint æquales (*Lib* VII §. 27.), duo itidem anguli B*ay*, *ya*C erunt æquales (*Lib.* I. §. 103.). Sunt autem æquales etiam duo *ay*B, *ay*C, utpote recti. Ergo duo quoque *a*BC, *a*CB æquales erunt (*Lib.* V. §. 46.); atque adeo etiam duo ABC, BCD erunt æquales (*Lib.* I. §. 103.); cum, ut modo demonstravimus, sint in ratione *dupla* ad æquales *a*BC, *a*CB, seu *a*B*y*, *y*C*a*. Eodem ratiocinio ostendam, angulum BCD æquare angulum CDA, & angulum CDA esse æqualem angulo DAB; atque adeo figuram ABCD esse æquiangulam. Rursus, cum duo anguli *a*BC, *a*CB ostensi sint æquales, triangulum B*a*C erit isosceles (*Lib.* V. §. 25.); cumque recta *ay* basi BC ad perpendiculum ex constructione insistat, basim ipsam BC bifariam dividet, nempe erit B*y* = *y*C (*Ibid.* §. 78.). Est autem eadem ratione etiam C*u* = *u*D, & *y*C = C*u* (*Lib.* VII. §. 85.). Ergo erit etiam BC = CD (*Lib.* I. § 127.); eandemque ob causam CD = DA; atque ita de ceteris. Figura itaque ABCD est æquiangula, & æquilatera; ac proinde regularis quod erat &c.

PROBLEMA XV.

Dato rectangulo æquale rectangulum super datam rectam construere.

54 Super rectam *nd* rectangulum construere oporteat, quod sit æquale dato rectangulo *afne*.

Resolutio.

Lateri *fn* dati rectanguli adiiciatur data recta *nd* in directum. Tum directe producto latere *ae* in *b*, fiat *eb* = *nd*, ductaque recta *bd*, constru-

ctum

Fig. 4. Tab. 9. ctum sit rectangulum *endb*, in quo ducatur diagonalis *bn* concurrens cum latere *af* in puncto *x*. Ex hoc autem puncto agatur recta *xz* parallela lateri *fd* (§. 7.), cui occurrant rectæ *en*, *bd* directe productæ in punctis *m*, *z*. Quadrilaterum *nmzd* erit rectangulum quæsitum.

Demonstratio.

Cum enim latera *ae*, *fn* rectanguli *afne* sint parallela, rectæ quoque *ab*, *fd* erunt parallelæ; cumque positæ sint æquales, æquales erunt etiam rectæ *af*, *bd*, & parallelæ (*Lib V.* §§. 75. 88.); ac proinde quadrilaterum *afdb* erit parallelogrammum, & quidem rectangulum, sicuti propterea etiam quadrilaterum *axzb*. Duorum autem parallelogrammorum *endb*, *fnmx* circa diametrum *xb* complementa sunt *afne*, *nmzd*, quæ sunt æqualia (*Lib. XIV.* §. 61.). Ergo rectangulum *nmzd* descriptum super rectam *nd* adæquat rectangulum datum *afne*, adeoque &c.

PROBLEMA XVI.

Dato triangulo rectilineo æquale rectangulum super datam rectam construere.

55. Super datam rectam *nd* construere oporteat rectangulum dato triangulo rectilineo ABC æquale.

Resolutio.

Super rectam FN æqualem dimidiæ parti baseos BC ipsius trianguli, & Fig. 5.6. Tab. 19. sub eadem altitudine AF construatur rectangulum AFNE (§. 26.), cui æquale fiat rectangulum *nmzd* super datam rectam *nd* (§. 54.). Quadrilaterum *nmzd* erit rectangulum quæsitum.

Demonstratio.

Constat enim, rectangulum AFNE esse æquale dato triangulo ABC (*Lib. IX.* §. 97.).

PROBLEMA XVII.

Dato polygono æquale rectangulum super datam rectam construere.

56 Super rectam *am* rectangulum construere oporteat, quod sit æquale polygono ABCE.

Resolutio.

Diviso polygono ABCE in tria triangula ACD, ADE, ABC, super rectam *am* fiat rectangulum *amnb* æquale triangulo ACD; super latus *bn* rectangulum *bnxe* æquale triangulo ABC, & super latus *ex* rectangulum *exzd* æquale triangulo ADE (§ 55.). Rectangulum *amzd* æquabit datum polygonum ABCE. Fig. 8. Fig. 7. Tab. 19.

Demonstratio.

Patet ex ipsa constructione.

COROLLARIUM.

57. Hinc facile dignosci potest excessus unius figuræ rectilineæ supra aliam, puta pentagoni ABCE supra triangulum ABC. Etenim constructo supra eandem rectam *am* rectangulo *amzd*, quod sit æquale pentagono ABCE, & rectangulo *amnb*, quod triangulum ABC adæquet, rectangulum *bnzd* erit excessus pentagoni ABCE supra triangulum ABC. Fig. 7. Fig. 5. Fig. 8. Tab. 19.

PROBLEMA XVIII.

Dato circulo æquale rectangulum super datam rectam construere.

58. Super rectam *mz* construendum sit rectangulum circulo ABC æquale. Fig. 10.

Resolutio.

Construatur super datam *mz* rectangulum *amzd* (§. 54.), quod sit æquale rectangulo ED contento sub radio EC ipsius circuli, & sub recta CD æquali ejusdem semiperipheriæ ABC. Erit *amzd* rectangulum quæsitum. Fig. 9. Tab. 19.

Demonstratio.

Manifestum quippe est, rectangulum ED æquare circulum ABC (*Lib.* X. §. 45.).

PROBLEMA XIX.

Dato rectangulo æquale quadratum construere.

59. Quadratum construere oporteat rectangulo ED æquale.

Re-

Resolutio.

Fig. 9. Tab. 19. Inter ipsius rectanguli latera EB, CD inveniatur media geometrice proportionalis Cb (§. 22.), quæ erit latus quadrati quæsiti.

Demonstratio.

Etenim, cum recta Cb sit media proportionalis inter latera EC, CD, quadratum *ab* rectangulo ED erit æquale (*Lib.* IX. §. 111.).

COROLLARIUM.

60. Hinc figura quæcunque rectilinea a quadrato diversa facili negotio
Fig. 5. Tab. 19. in quadratum mutari potest. Id enim ex transformatione ipsius figuræ in rectangulum unice dependet. Sic triangulum ABC mutabitur in quadratum, si constructo rectangulo AFNE æquali triangulo ABC, fiat quadratum *ae* ipsi rectangulo æquale.

PROBLEMA XX.

Dato circulo æquale quadratum construere.

61. Esto circulus ABC, cui æquale quadratum construere oporteat.

Resolutio.

Inter radium EC, & rectam CD, quæ sit æqualis semiperipheriæ ipsius
Fig. 9. Tab. 19. circuli, inveniatur media geometrice proportionalis Cb (§. 22.). Hæc erit latus quadrati quæsiti.

Demonstratio.

Quadratum quippe *ab* adæquat rectangulum ED (*Lib.* IX. §. 111.), cui circulus ipse est æqualis (*Lib.* X. §. 45.).

SCHOLION.

62. Eodem modo invenitur latus quadrati, quod sit æquale dato cuilibet polygono regulari. Omne enim polygonum regulare adæquat rectangulum contentum sub radio, & sub illius semiperimetro (*Lib.* IX. §. 30.).

PRO-

PROBLEMA XXI.

Data figura plana, alteram illi similem in data proportione describere.

63. Describere oporteat figuram rectilineam similem figuræ ADC, ad quam se habeat, ut data quævis magnitudo *m* ad magnitudinem *n*.

Resolutio.

Ducatur recta EF, ad quam latus quodcunque AB datæ figuræ eam habeat proportionem, quam habet magnitudo *m* ad magnitudinem *n* (§ 21.). Fig. 14. Tab. 18.
Tum inter rectas AB, EF inveniatur media proportionalis *ab* (§. 22.), quæ erit latus figuræ quæsitæ.

Exemplum.

Ut si describendum sit pentagonum *duplum* pentagoni dati ADC, ponatur recta EF *dupla* rectæ, sive lateris AB, & inveniatur inter eas media proportionalis *ab*, super quam si construatur pentagonum simile *adc* (§.29.), Fig. 15.
illud erit *duplum* pentagoni ADC. Si vero construere oporteat pentagonum Tab. 18.
in ratione *subdupla* ad pentagonum *adc*, ponatur recta *xz*, *subdupla* lateris *ab*; tum inter rectas *ab*, *xz* inveniatur media proportionalis AB. Pentagonum ADC super ipsam AB constructum simile dato *adc*, erit *subduplum* ipsius *adc*.

Demonstratio.

Patet ex §. 183. lib. IX.

SCHOLION.

64. Pro augendo, & imminuendo circulo, ratio diametri habenda est; ut ex §. 189. lib. IX. manifeste deducitur.

PROBLEMA XXII.

Datis duabus figuris rectilineis similibus, alteram illis simul sumtis æqualem describere.

65. Describere oporteat triangulum, quod sit æquale duobus triangulis similibus ABD, ACE simul sumtis.

Resolutio.

Fig. 11. Tab. 19. Latera ipsorum triangulorum homologa AB, AC jungantur ad angulum rectum BAC (§. 12.), eorumque extrema B, C jungantur recta BC, quæ erit latus homologum trianguli quæsiti.

Demonstratio.

Manifesta est ex §. 184. lib. IX.

SCHOLION I.

66. Eodem modo invenitur circulus duobus aliis simul sumtis æqualis, ut patet ex §. 191. lib. IX. Pro ellipsibus vero, axes tam majores, quam minores datarum ellipsium seorsim simul jungi debent ad angulos rectos, ut axes homologi ellipsis, quæ sit illis æqualis, inveniantur. Patet ex §. 76. lib. XVI.

SCHOLION II.

67. Hoc eodem artificio invenitur latus homologum figuræ rectilineæ, Fig. 12. Tab. 19. quæ non solum duabus similibus, sed pluribus etiam itidem similibus simul sumtis sit æqualis. Ut si rectæ AB, AC, CD fuerint latera homologa trium figurarum rectilinearum similium, invenitur latus figuræ, quæ omnes illas simul sumtas adæquet, jungendo duo latera AC, AB ad angulum rectum CAB, & applicando alterum latus CD rectæ CB itidem ad rectum angulum BCD. Recta quippe BD est latus quæsitum, ut consideranti perspicuum fiet.

SECTIO TERTIA.

De solidis.

PORISMA.

Dato parametro, parabolam describere.

68. Describenda sit parabola, cujus parameter sit recta AC.

Re-

Resolutio.

Ex uno extremo A datæ rectæ AC erigatur perpendicularis indefinita Ad (§. 12.), in qua sumantur quotcunque puncta a, b, d, atque ex his educantur perpendiculares aE, bF, dD illius magnitudinis, ut aE sit media proportionalis inter parametrum AC, & abscissam Aa, quemadmodum etiam recta bF inter parametrum AC, & abscissam Ab, nec non recta dD inter eundem parametrum AC, & correspondentem abscissam Ad (§. 22.). Tum per puncta A, E, F, D ducatur curva AEFD, quæ erit parabola quæsita. Fig. 13. Tab. 19.

Demonstratio.

Patet ex natura parabolæ §. 165. lib. XV. explicata.

PROBLEMA I.

Inter duas rectas lineas invenire duas rectas continuo geometrice proportionales.

69. Inter duas rectas AB, BC invenire oporteat duas rectas continue geometrice proportionales.

Resolutio I.

Rectæ AB, BC jungantur ad angulum rectum ABC (§. 12.), & utraque versus x, n indefinite producta, accipiantur duæ normæ EDF, MNP, quæ ita rectis ipsis applicentur, ut apex x anguli normalis nxA sit perpetuo in recta Bx, ejusque acies xA transeat per extremum A rectæ AB, apex vero n normalis anguli MnC sit in recta Bn, & illius latus nC per extremum C rectæ BC continue transeat, ut in figura conspicitur. Duæ rectæ Bx, Bn erunt duæ mediæ continue proportionales inter rectas AB, BC. Fig. 14. Tab. 19.

Demonstratio.

Quandoquidem, cum in triangulo nxA angulus nxA sit rectus, & linea xB ad perpendiculum rectæ nA incumbat (*Lib.* III. §. 52.), erit ∺ AB. Bx. Bn (*Lib.* IX. §. 74.). Est autem haud dissimili ratione ∺ Bx. Bn. BC. Ergo erit ∺ AB. Bx. Bn. BC.

Resolutio II.

Duæ rectæ AB, BC jungantur ad angulum rectum ABC (§. 12.); ductaque recta AF parallela rectæ BC, & recta CF parallela rectæ AC (§. 7.), in rectangulo ABCF agatur diagonalis FB, quæ bifariam divisa in a (§. 1.), Fig. 15. Tab. 19.

centro a, intervallo aF describatur circulus AHCM, qui transibit per quatuor puncta A, B, C, F, cum duo oppositi anguli FAB, BCF sint recti. Producto deinde latere AF in E, ita ut sit AE = AB, describatur parabola AMD, cujus axis sit recta AB, & parameter recta AE (§. 68.). Ex puncto autem M, in quo curva parabolica AMD secat peripheriam circuli AHCM, agatur recta MH parallela lateri BC (§. 7.) Duæ rectæ Mb, bA erunt duæ mediæ continue geometrice proportionales inter rectas AB, BC, erit nempe ∺ AB. bM. bA. BC.

Demonstratio.

Cum enim sit AB = AE, erit AB × Ab = AE × Ab. Quadratum autem semiordinatæ bM adæquat rectangulum AE × Ab (*Syn. Alg.* §. 261.). Ergo quadratum rectæ bM rectangulo quoque AB × Ab erit æquale (*Lib.* IX. §. 118.); ac proinde habebitur ∺ AB. bM. bA (*Lib.* IX. §. 118.). Rursus, cum rectangulum AB × Ab, utpote æquale rectangulo AE × Ab, sit æquale quadrato semiordinatæ bM (*Lib.* XV. §. 162.), atque insuper rectangulum bM × Me una cum rectangulo bM × be sit æquale eidem quadrato rectæ bM (*Ibid* §. 144.), rectangulum bM × Me una cum rectangulo bM × be æquabit rectangulum AB × Ab (*Syn. Alg.* §. 262.). Constat autem, rectangulum AB × Ab æquare rectangulum Bb × bA una cum quadrato rectæ Ab (*Lib.* XV. §. 269.). Ergo rectangulum quoque bM × Me una cum quadrato rectæ Ab (*Syn. Alg* §. 262.), cumque rectangulum bM × bH adæquet rectangulum bM × Me ob æqualitatem segmentorum bH, eM, rectangulum bM × bH una cum rectangulo bM × be æquabit rectangulum Bb × bA una cum quadrato rectæ Ab. Duo autem rectangula Bb × bA, bM × bH sunt æqualia (*Lib.* IX. §. 148.). Ergo, his sublatis, rectangulum bM × be erit æquale quadrato rectæ Ab (*Syn. Alg.* §. 266.); atque adeo erit ∺ bM. bA. be (*Lib.* IX. §. 118.); cumque sit BC = be, erit quoque ∺ bM. bA. BC, & ideo ∺ BA. bM. bA. BC.

PROBLEMA II.

Pyramidem, & prisma in æquale parallelepipedum convertere.

I.

70. Parallelepipedum construere oporteat, quod pyramidi ABCD sit æquale.

Resolutio.

Basis BCD pyramidis mutetur in rectangulum abd (§§. 55. 56.), super
Fig. 16. quod, veluti basim, & sub altitudine an, quæ sit tertia pars altitudinis
Fig. 17. Tab. 19. datæ pyramidis, construatur parallelepipedum $nabdm$. Parallelepipedum $nabdm$ æquale erit pyramidi ABCD.

De-

Demonstratio.

Patet ex §§. 29, 30 lib. XIII.

II.

71. Esto prisma AD transformandum in parallelepipedum.

Resolutio.

Fiat rectangulum *abd* æquale basi BCD ipsius primatis (§§. 55. 56.). Tum super ipsum rectangulum *abd*, & sub eadem altitudine construatur parallelepipedum *nd*. Erit *nd* parallelepipedum quæsitum. Fig.17. Fig.18. Tab.19.

Demonstratio.

Manifesta est ex §. 35. lib. XIII., cum parallelepipedum sit species prismatis (*Lib.* XI. §. 23.).

COROLLARIUM.

72. Cum conus sit pyramis infinitangula (*Ibid.* §. 72.), & cylindrus sit species prismatis (*Ibid.* § 70.), manifeste constat, quomodo utrumque hujusmodi solidum in parallelepipedum mutari queat.

PROBLEMA III.

Sphæram in parallelepipedum mutare.

73. Construendum sit parallelepipedum, quod sit æquale datæ sphæræ NR. Fig.19. Tab.19.

Resolutio.

Describatur quadratum *bed* æquale maximo ipsius sphæræ circulo (§.61.), super quod, veluti basim, & sub recta *ab*, quæ *duos trientes* diametri NR, contineat, construatur parallelepipedum *ad*, quod erit ipsi sphæræ æquale. Fig.23

Demonstratio.

Parallelepipedum *ad* adæquat cylindrum (*Lib.* XIII. §. 35.), cujus baseos circulus sit æqualis quadrato *bed*, & eadem utriusque altitudo (Duo enim hujusmodi solida spectari possunt, veluti duo prismata æqualium basium, & alti-

altitudinum). Sphæra autem NR est hujusmodi cylindro æqualis (*Lib.*XIV. §. 108.). Ergo sphæra NR parallelepipedum quoque *ad* æquabit (*Syn. Alg.* §.261.).

PROBLEMA IV.

Superficiei sphæræ, æqualem circulum describere.

74. Circulum describere oporteat, cujus area adæquet superficiem sphæræ NR.

Resolutio.

Describatur circulus, cujus radius sit diameter NR datæ sphæræ. Hujus circuli area æquabit superficiem datæ sphæræ NR.

Demonstratio.

Evidens est ex §. 73. lib. XIV.

PROBLEMA V.

Dato parallelepipedo cubum æqualem construere.

Fig. 20. Tab. 19. 75. Cubum construere oporteat, qui sit æqualis parallelepipedo AD.

Resolutio.

Si basis BCD dati parallelepipedi AD non est quadrata, fiat quadratum Fig. 21. BEF illi æquale (§. 56.), super quod constructum sit parallelepipedum AF ejusdem altitudinis AB. Tum posita recta $a = BE$, & recta $d = AB$, inter duas a, d inveniantur duæ mediæ continue proportionales b, c (§. 69.). Fig. 22. Harum prima b erit latus cubi quæsiti; cubus nimirum ad, cujus latus be sit æquale rectæ b, æquabit parallelepipedum AD.

Demonstratio.

Quoniam quatuor rectæ a, b, c, d positæ sunt continue proportionales, erit $a . c = b . d$. Quadratum autem, sive basis BEF parallelepipedi AF est ad quadratum bed basis parallelepipedi ad, ut prima a ad tertiam c (*Lib.* IX. § 183.), cum positum fuerit $BE = a$, $be = b$. Ergo basis BEF parallelepipedi AF erit quoque ad basim bed parallelepipedi ad, ut secunda b ad quartam d (*Lib.* I. §. 78.). Constat autem, altitudinem ab cubi ad esse ad altitudinem AB parallelepipedi AF, ut recta itidem b ad rectam d, ex eo nimirum quod sit $ab = b$, & $AB = d$ per constructionem. Ergo duo parallelepipeda AF, ad reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines; atque adeo

adeo sunt inter se æqualia (*Lib.* XIII. § 60.). Parallelepipedum porro AF adæquat parallelepipedum AD (*Ibid.* §. 36.); utpote ejusdem cum illo basis, & altitudinis. Igitur cubus *ad* parallelepipedo quoque AD est æqualis (*Syn. Alg.* §. 261.) adeoque &c.

S C H O L I O N 1.

82. Cum ex hactenus traditis notum sit artificium mutandi pyramidem, conum, prisma, cylindrum, sphæram, & sphæroidem in parallelepipedum, perspicuum remanet, quomodo hujusmodi solida in cubum transformari queant.

PROBLEMA VII.

Dato solido, invenire latus homologum solidi similis, quod determinatam ad illud rationem habeat.

83. Esto *nd* solidum datum. Invenire autem oporteat latus homologum Fig.18.
solidi similis, ad quod datum ipsum solidum *nd* sit, ut *m* ad *n*. Tab.19.

Resolutio.

Posita recta *a* æquali lateri *ab*, ducatur recta *d*, ad quam recta *a* sit, Fig.22.
ut *m* ad *n*. Inter rectas autem *a*, *d* inveniantur duæ mediæ continue pro- Tab 19.
portionales *b*, *c* (§. 69.). Recta *b* erit latus solidi quæsitum.

Exemplum.

Construere oporteat cubum, ad quem cubus *nd* sit in ratione *sesquialtera*. Posita itaque recta $a = ab$, & recta $d = \frac{2a}{3}$, inter duas *a*, *d* inveniantur duæ mediæ continue proportionales *b*, *c*, quarum prima *b* sit latus cubi MF. Erit MF cubus quæsitus.

Demonstratio.

Evidens est ex §. 137. lib. XIII.

S C H O L I O N 1.

84. Hac ratione invenitur diameter sphæræ, quæ determinatam habeat rationem ad sphæram datam. Patet ex §. 161. lib. XIII. Eodem modo ratiocinare de conis, & cylindris, videlicet rationem habendam esse tum diametrorum basium, tum altitudinum.

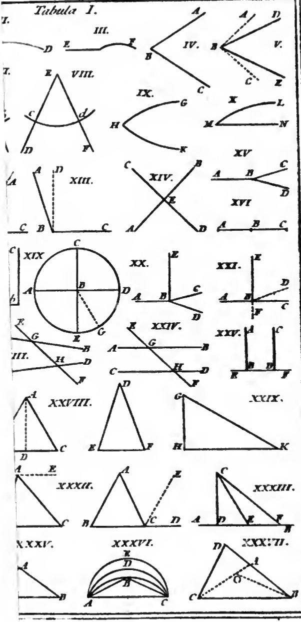
SCHO-

SCHOLION II.

85. Itaque per inventionem duarum mediarum continue geometrice inter duas datas rectas lineas proportionalium solvitur celeberrimum de cubi duplicatione Deliacum problema, quod priscorum ingenia adeo torsit. Hanc porro viam, quam primus omnium invenit Hippocrates Chius, omnes postea Geometræ amplexati sunt, summisque laudibus exornarunt, utpote, quemadmodum advertit Vir Cl. Andreas Tacquet, plane unicam, & singularem.

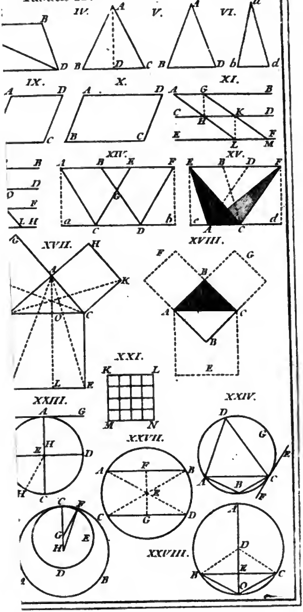
FINIS.

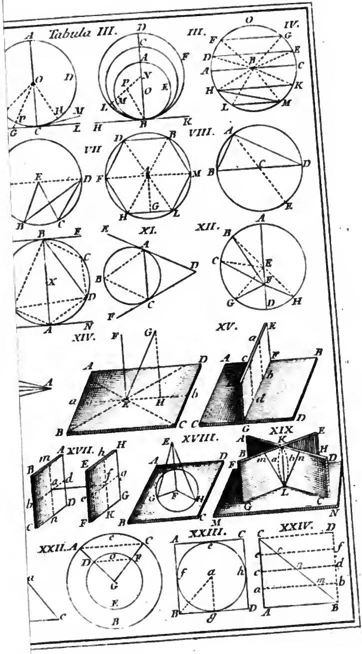
Tabula I.

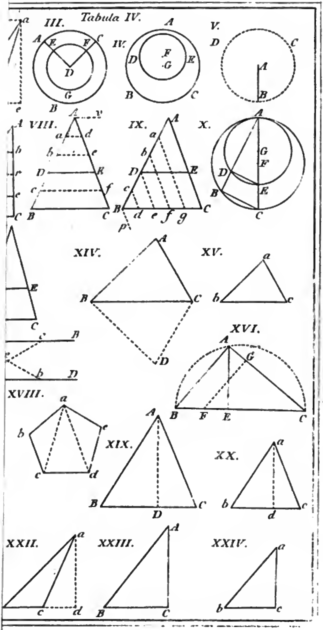


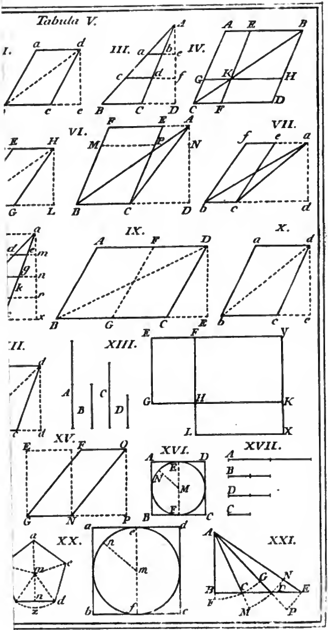
III.
IV.
V.
VIII.
IX.
X
XIII.
XIV.
XV
XVI
XIX
XX.
XXI.
XXIV.
XXV.
XXVIII.
XXIX.
XXXII.
XXXIII.
XXXVI.

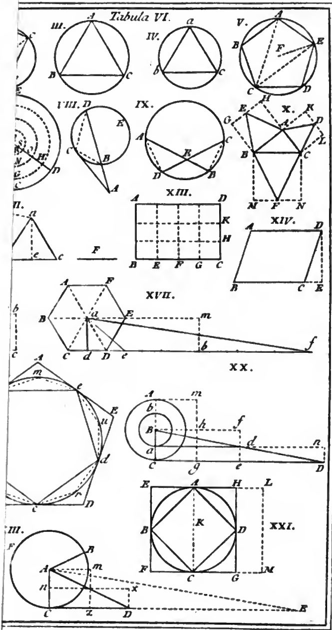
Tabula II.



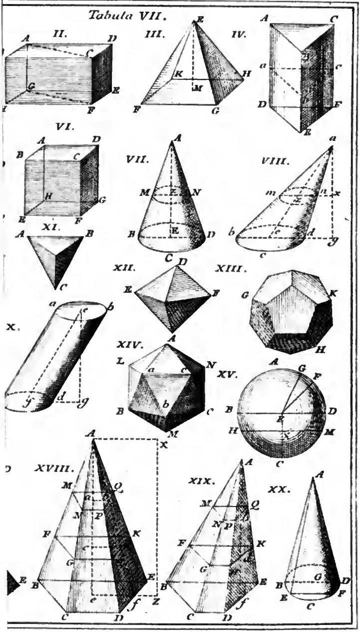

Tabula III.
III.
IV.
VII
VIII.
XI.
XII.
XIV.
XV.
XVII.
XVIII.
XIX
XXII.
XXIII.
XXIV.


Tabula IV.
III.
IV.
V.
VIII.
IX.
X.
XIV.
XV.
XVI.
XVIII.
XIX.
XX.
XXII.
XXIII.
XXIV.

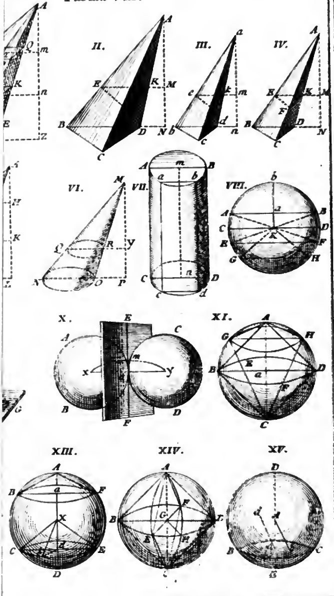

Tabula V.
I.
III.
IV.
VI.
VII.
IX.
X.
XIII.
XV.
XVI.
XVII.
XX.
XXI.

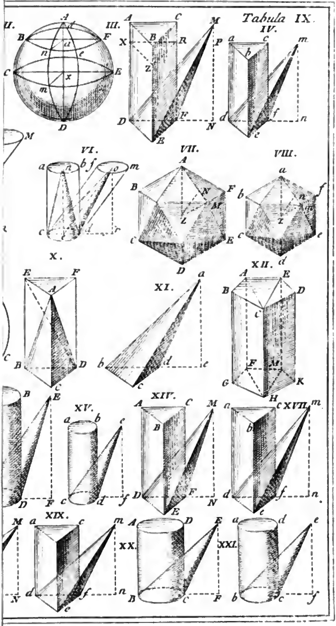

Tabula VI.
III.
IV.
V.
VIII.
IX.
X.
XIII.
XIV.
XVII.
XX.
XXI.

Tabula VII.

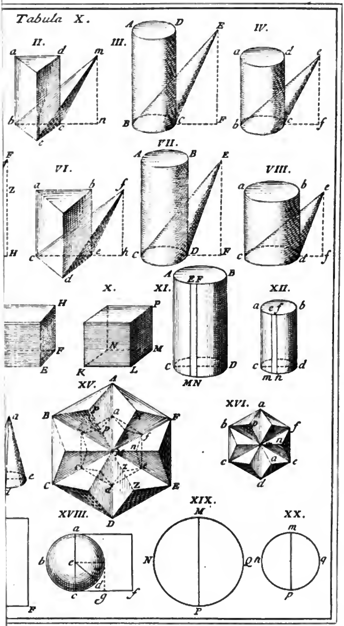


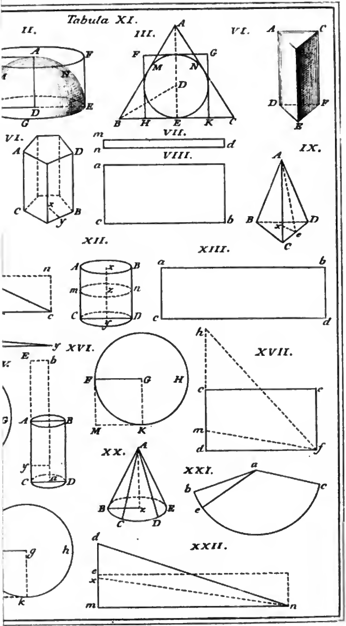
Tabula VIII.



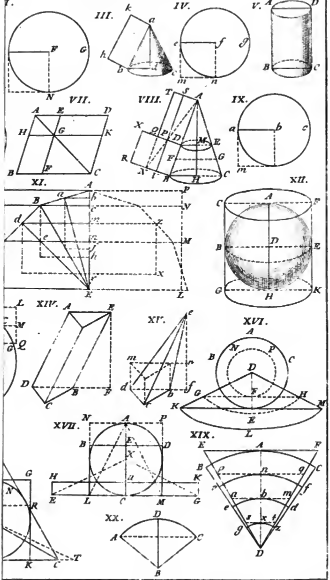


Tabula IX.

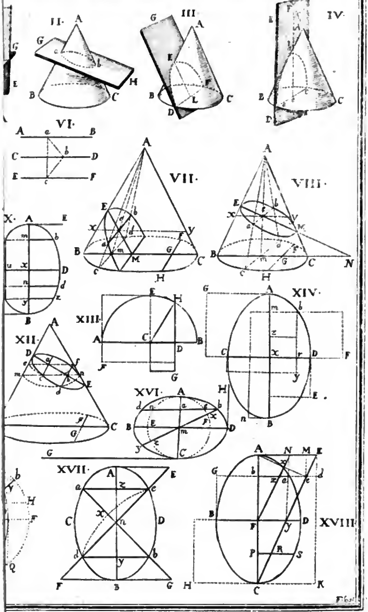

Tabula X.
II.
III.
IV.
VI.
VII.
VIII.
X.
XI.
XII.
XV.
XVI.
XVIII.
XIX.
XX.


Tabula XI.
II.
III.
VI.
VI.
VII.
VIII.
IX.
XII.
XIII.
XVI.
XVII.
XX.
XXI.
XXII.

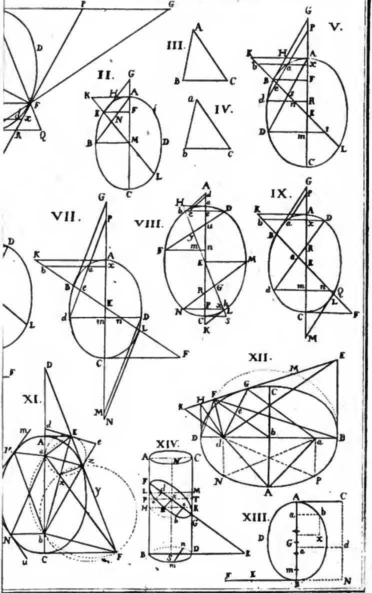
Tabula XII.

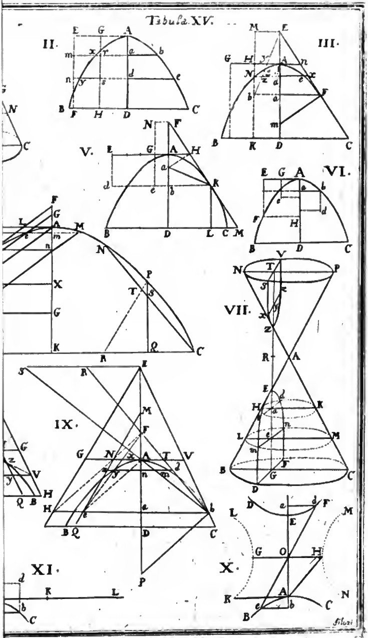


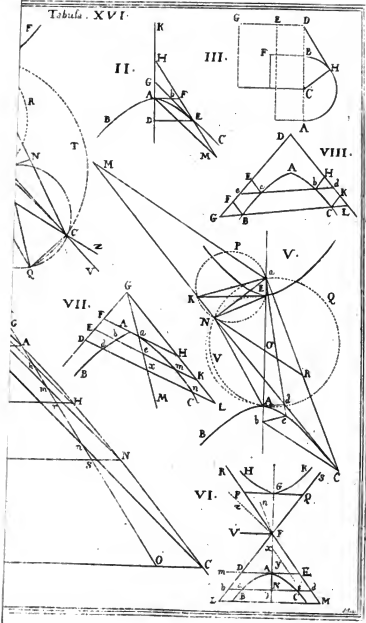
Tabula XIII.



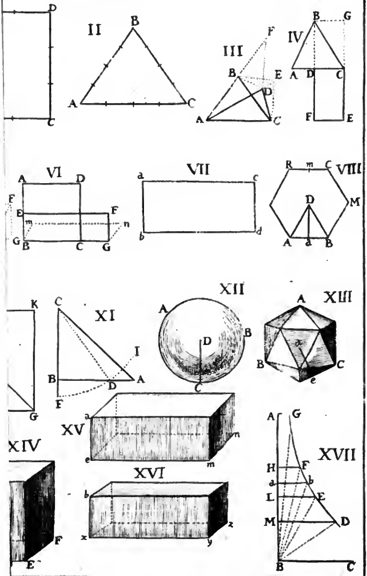
Tabula XIV.



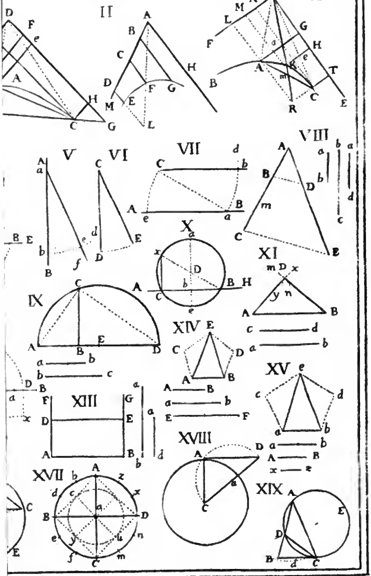

Tabula XV.
II.
III.
V.
VI.
VII.
IX.
X.
XI.


Tabula . XVI .
II .
III .
VIII .
V .
VII .
VI .

Tabula XVII



Tabula XVIII



Tabula XIX

